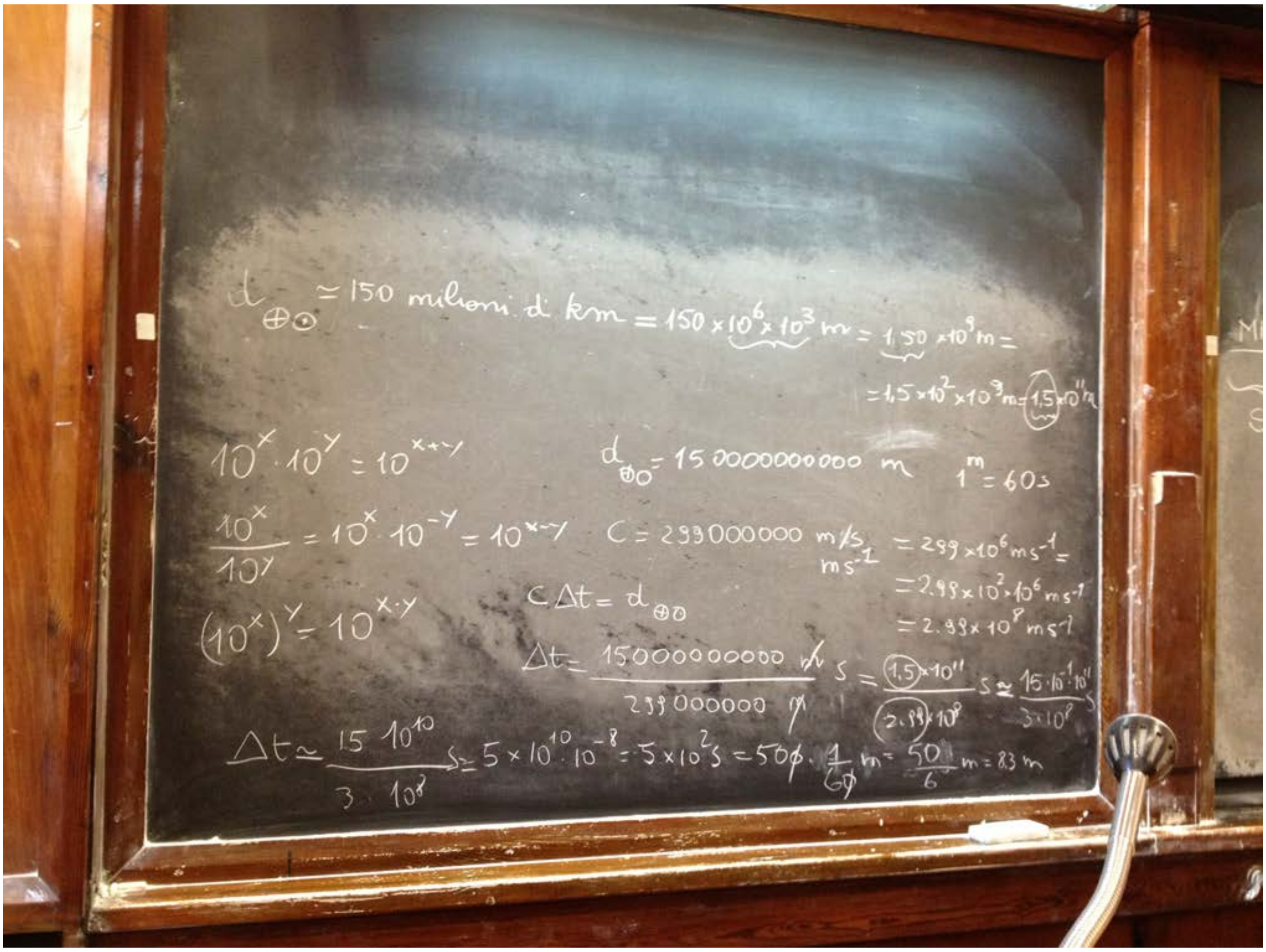
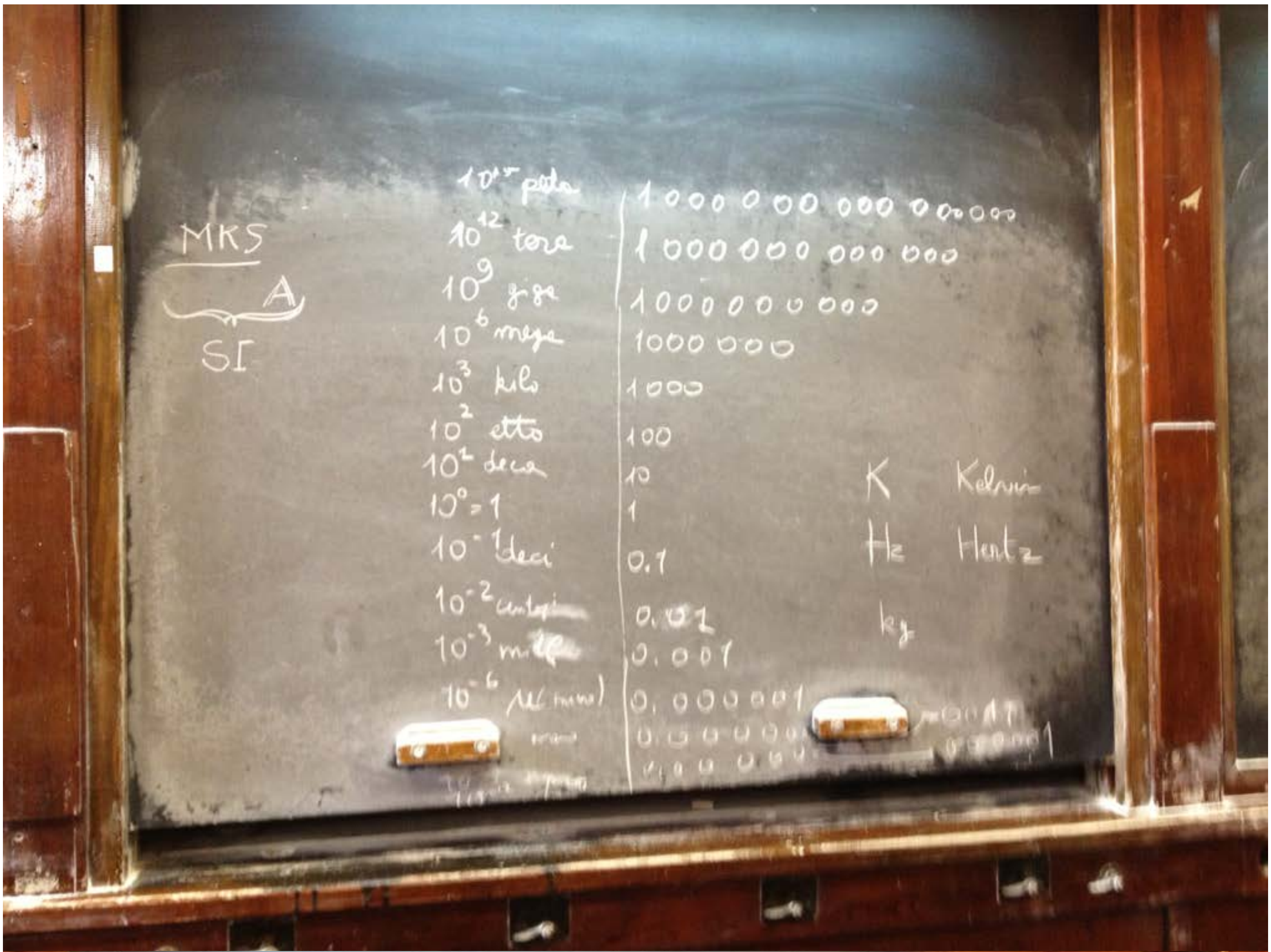
**Anna M. Nobili: Lezioni Fisica 1 per Chimici a.a. 2013-2014**

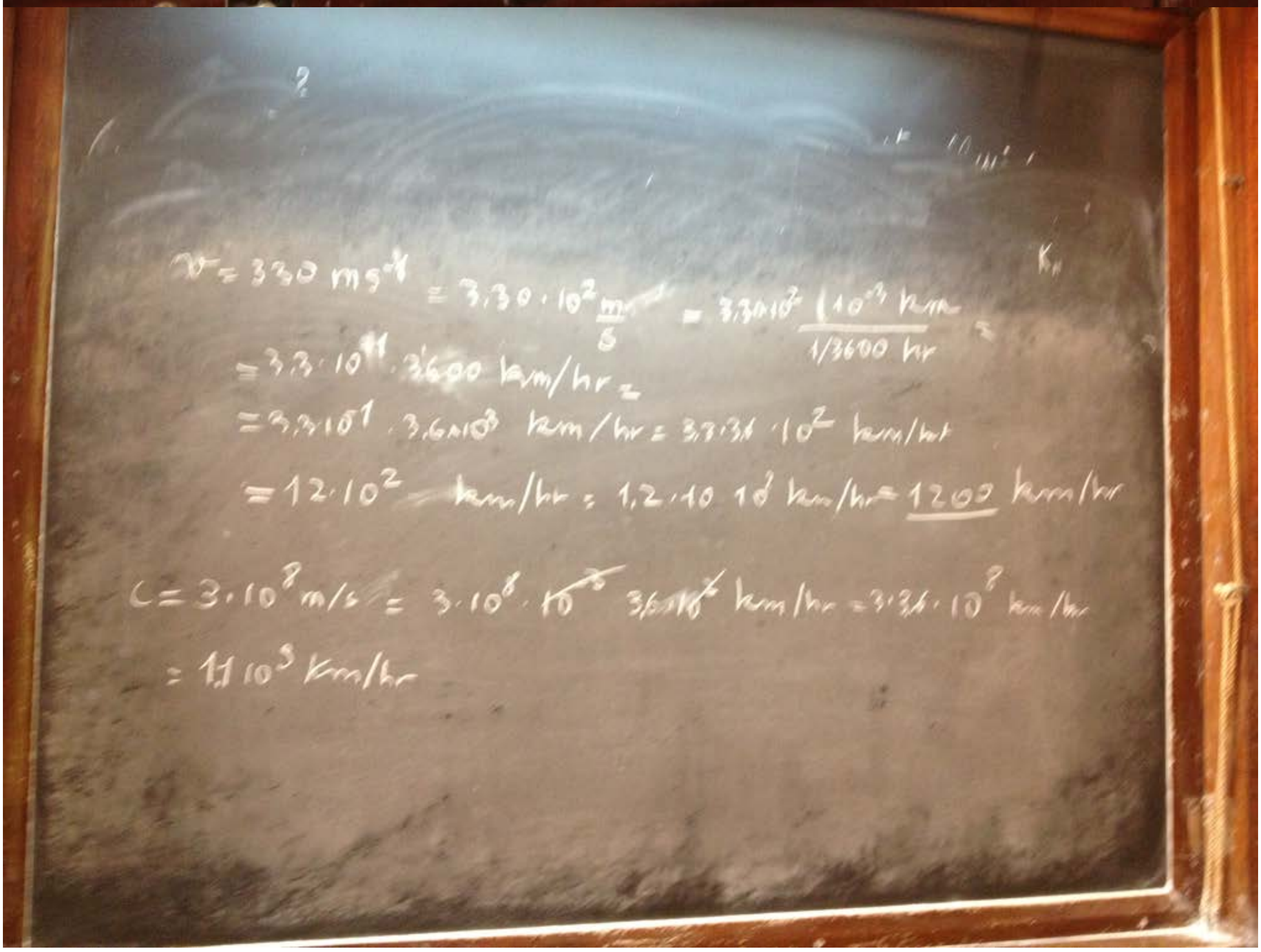
__26 Settembre 2013__

Grandezze fisiche, dimensioni e unità di misura.

Potenze di 10 e loro uso.

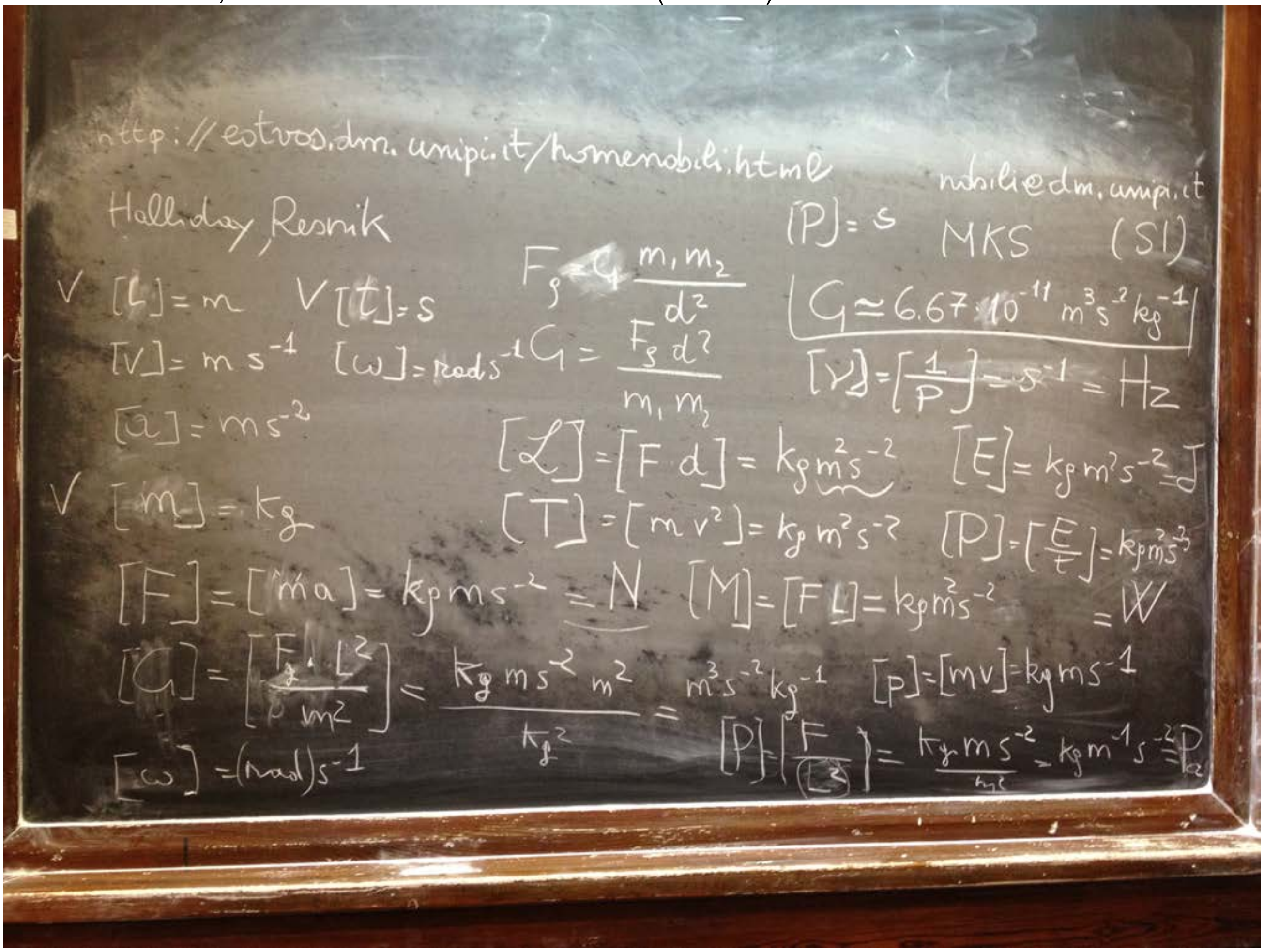


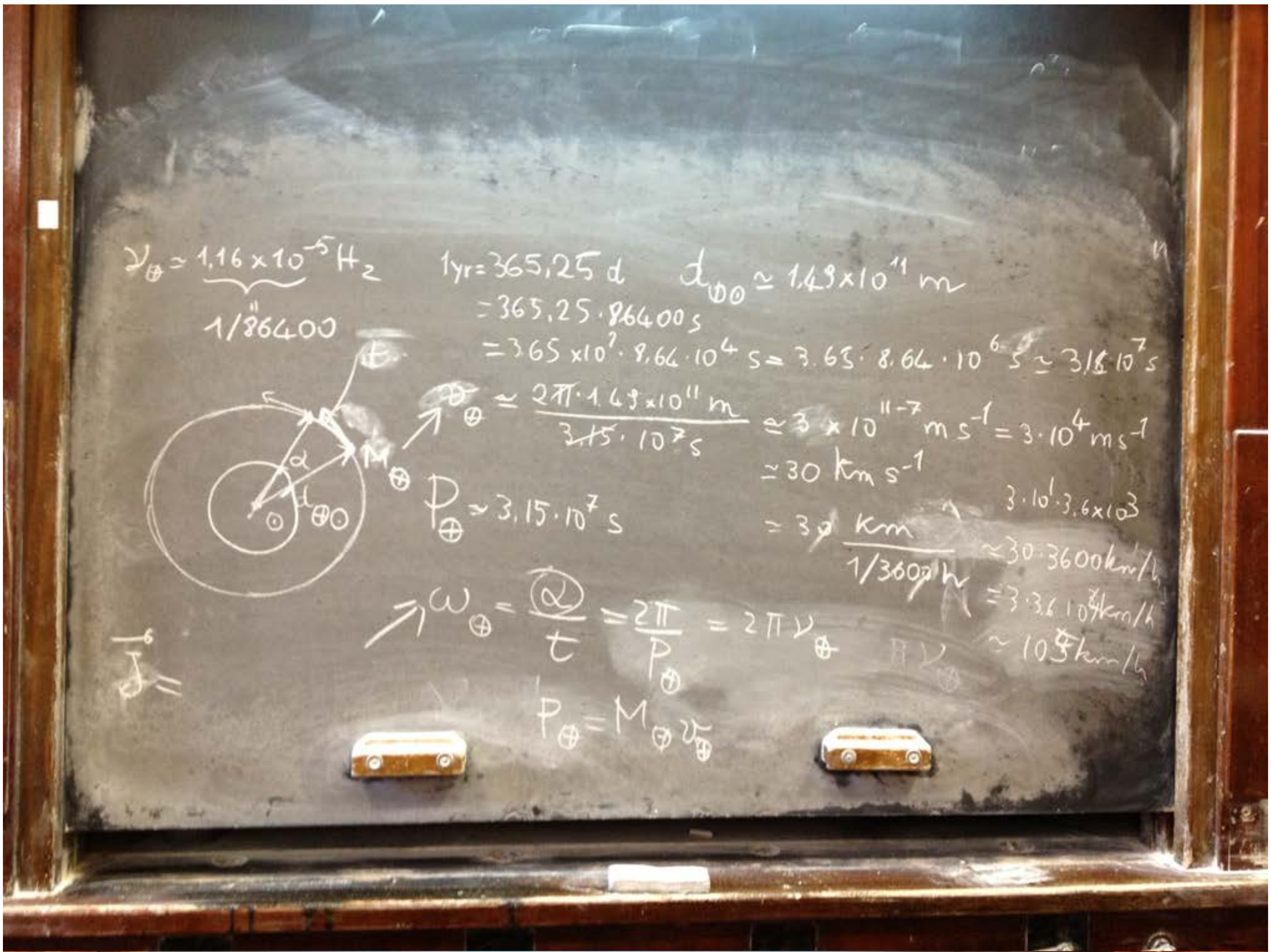

MKS
A
SI
10¹⁵ peta 1 000 000 000 000 000
10¹² tera 1 000 000 000 000
10⁹ giga 1 000 000 000
10⁶ mega 1 000 000
10³ kilo 1 000
10² etto 100
10¹ deca 10
10⁰ = 1 1
10⁻¹ deci 0.1
10⁻² centi 0.01
10⁻³ milli 0.001
10⁻⁶ 0, 000 001
K Kelvin
Hz Hertz
kg


v = 330 ms⁻¹ = 3,30 · 10² m/s
= 3,3 · 10¹ · 3600 km/hr
= 3,3 · 10¹ · 3,6 · 10³ km/hr
= 12 · 10² km/hr = 1200 km/hr
c = 3 · 10⁸ m/s
= 1,1 10⁹ km/hr

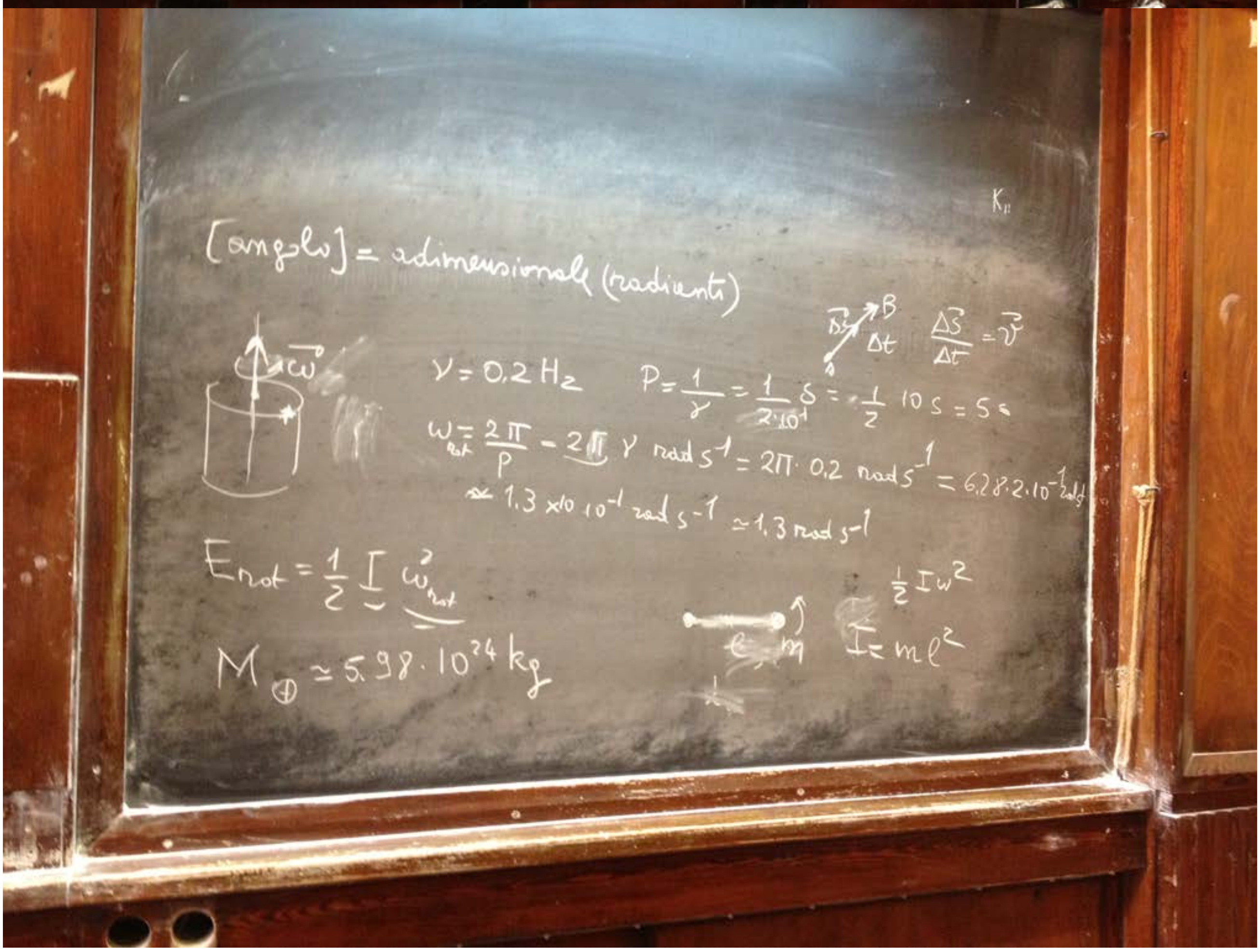
**3 Ottobre 2013**

Grandezze fisiche, dimensioni e verifiche dimensionali (continua)





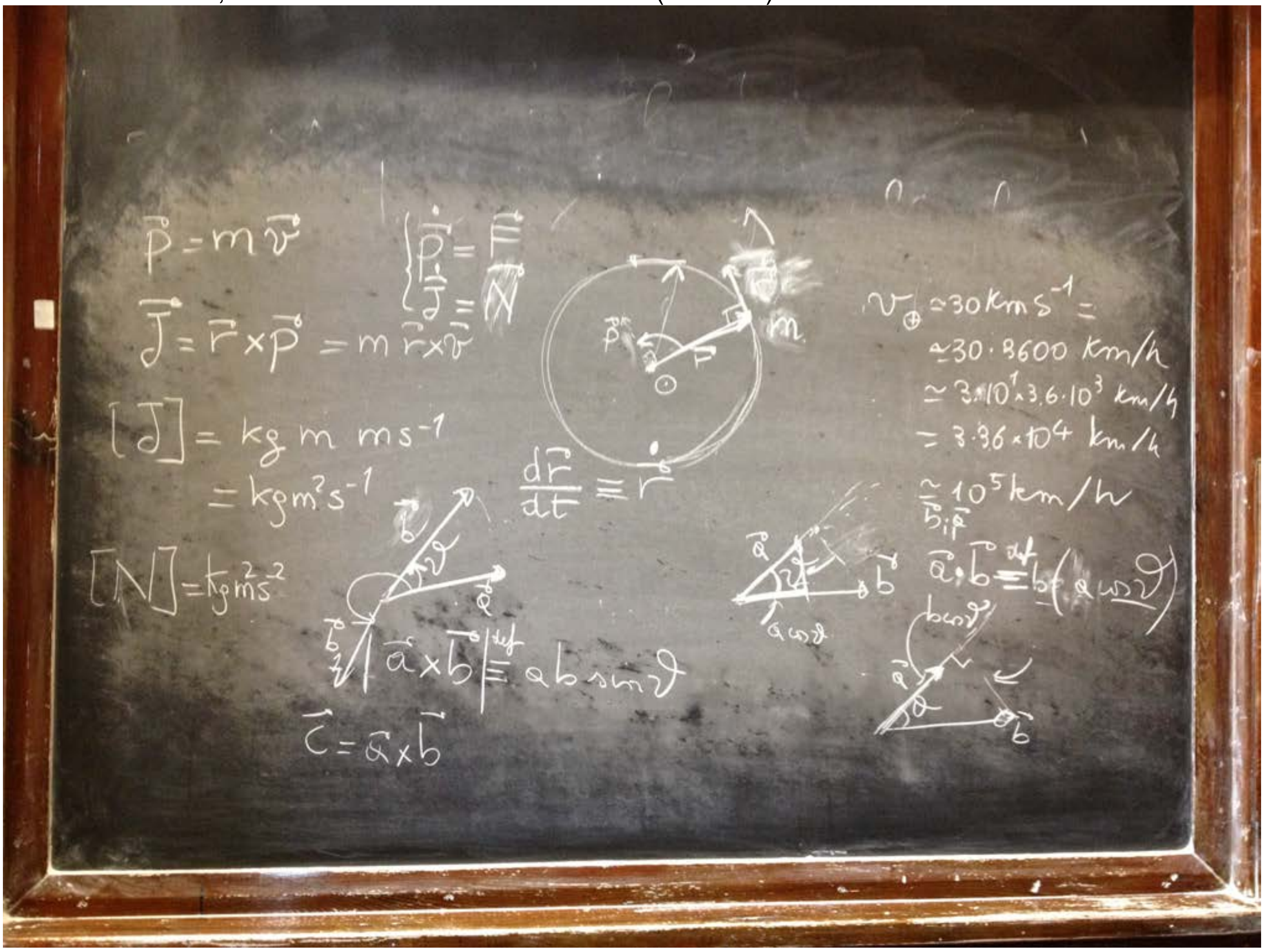
$\nu_\oplus \simeq 1{,}16 \times 10^{-5}$ Hz
1/86400
1yr = 365,25 d
= 365,25 · 86400 s
= 3.65 x 10^2 · 8,64 · 10^4 s = 3.65 · 8.64 · 10^6 s ≃ 3,15 · 10^7 s
$d_{\oplus\odot} \simeq 1{,}49 \times 10^{11}$ m
≃ 2π · 1.49 x 10^11 m / 3,15 · 10^7 s
≃ 3 x 10^(11-7) m s^-1 = 3 · 10^4 m s^-1
≃ 30 km s^-1
$P_\oplus \simeq 3{,}15 \cdot 10^7$ s
3 · 10^1 · 3,6 x 10^3
= 30 km / 1/3600 h
≃ 30 · 3600 km/h
= 3 · 3,6 10^4 km/h
≃ 10^5 km/h
ω⊕ = α / t = 2π / P⊕ = 2π ν⊕
P⊕ = M⊕ v⊕

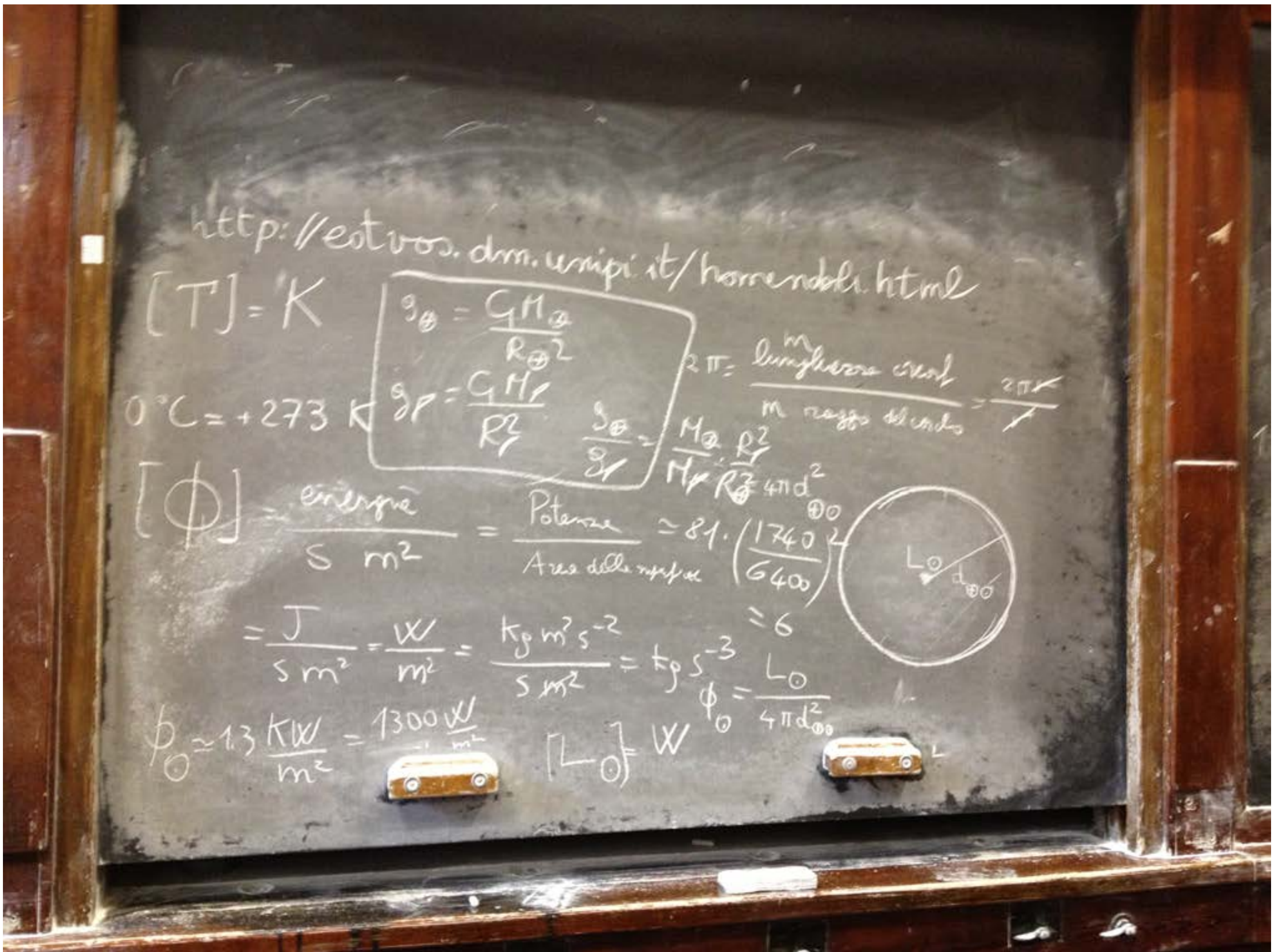



[angolo] = adimensionale (radianti)
Δs / Δt
ν = 0.2 Hz
P = 1/ν = 1/(2·10^-1) s = 1/2 10 s = 5 s
ω_rot = 2π / P = 2π ν rad s^-1 = 2π · 0,2 rad s^-1 = 6,28 · 2 · 10^-1 rad s^-1
≃ 1,3 x 10 10^-1 rad s^-1 ≃ 1,3 rad s^-1
E_rot = 1/2 I ω²_rot
1/2 I ω²
I = m l²
M⊕ ≃ 5.98 · 10^24 kg

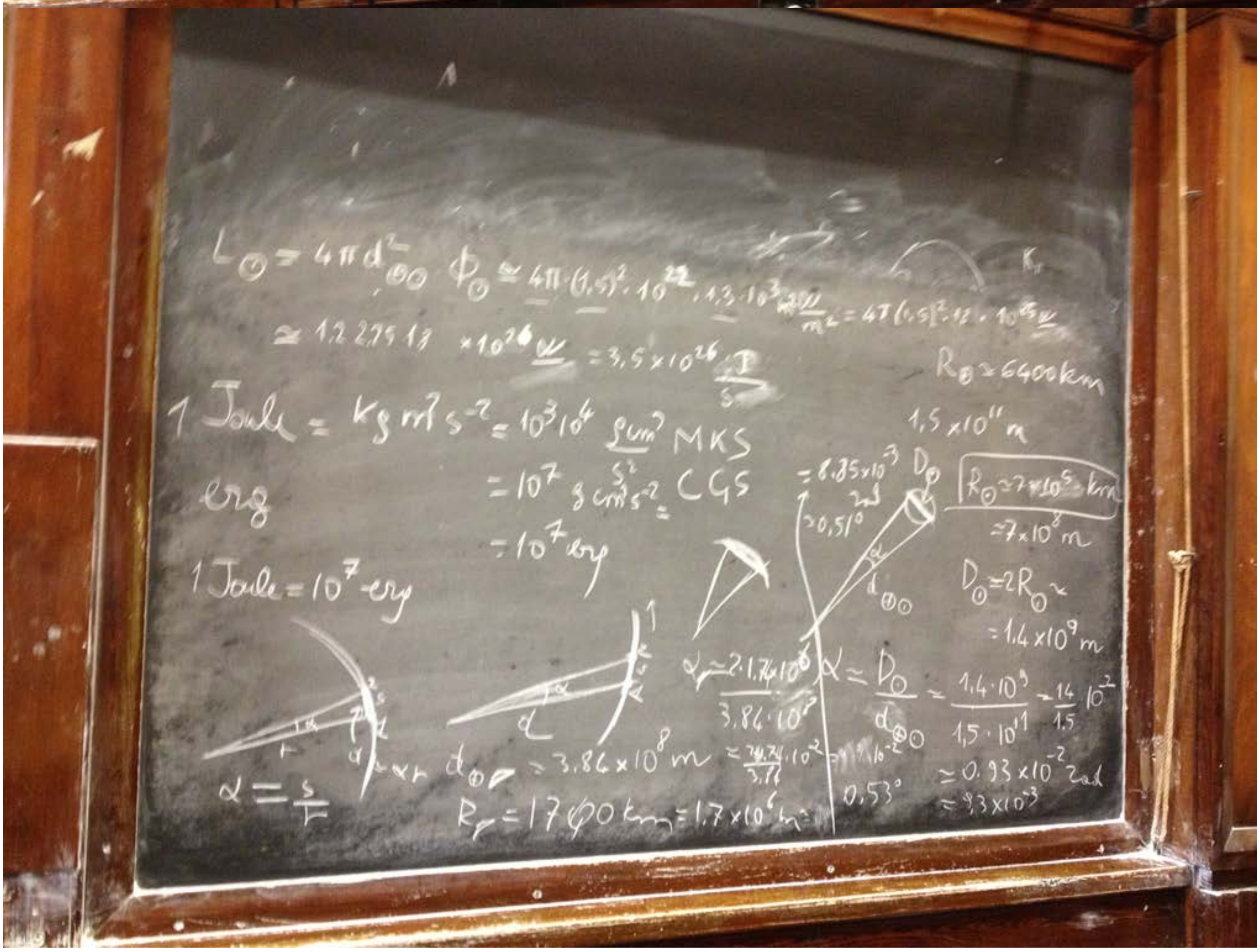
**10 Ottobre 2013**

Grandezze fisiche, dimensioni e verifiche dimensionali (continua)





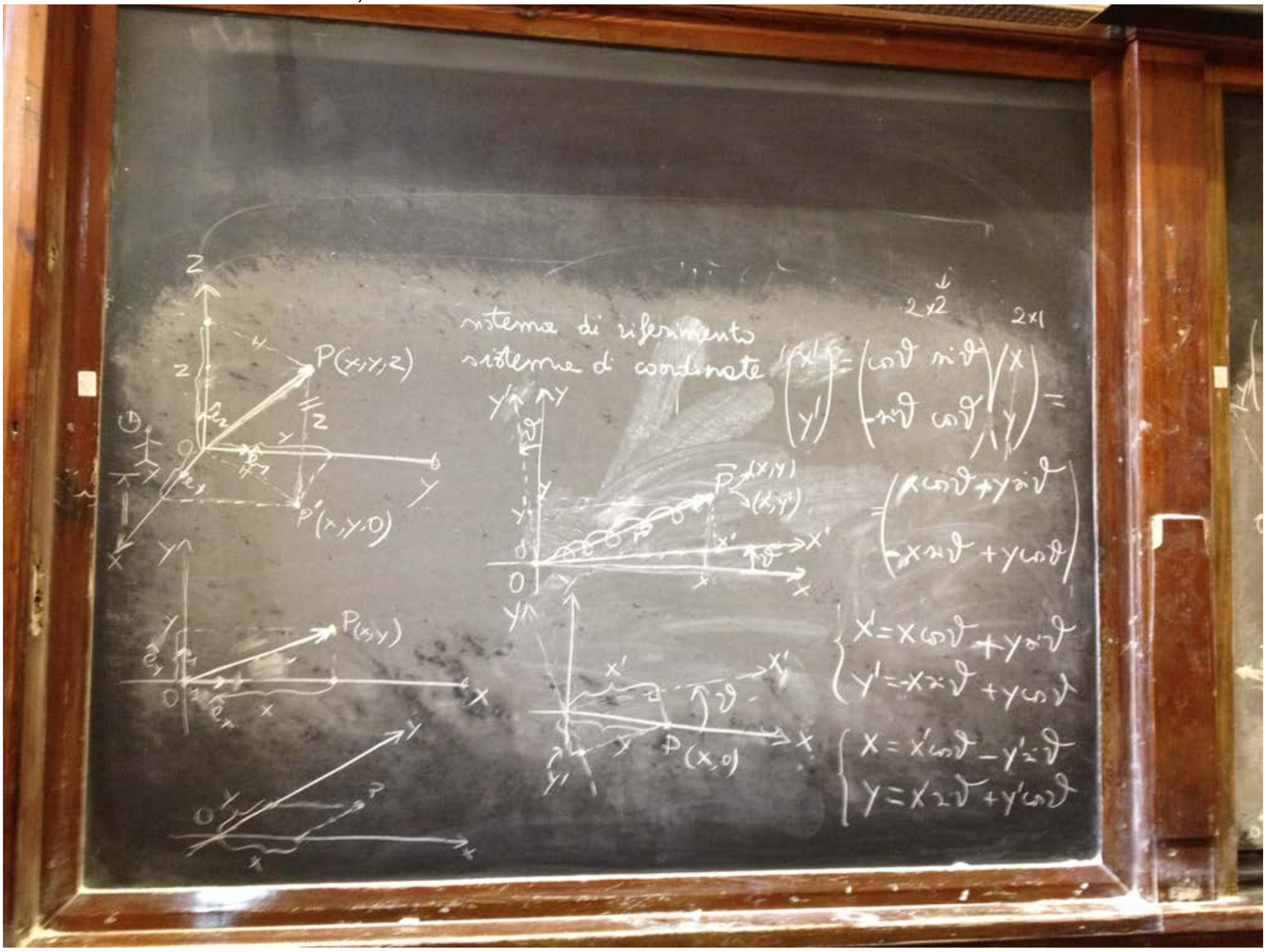
http://eotvos.dm.unipi.it/
[T] = K
0°C = +273 K
energia
S m²
Potenza
Area della superficie
≃ 6
[L] = W

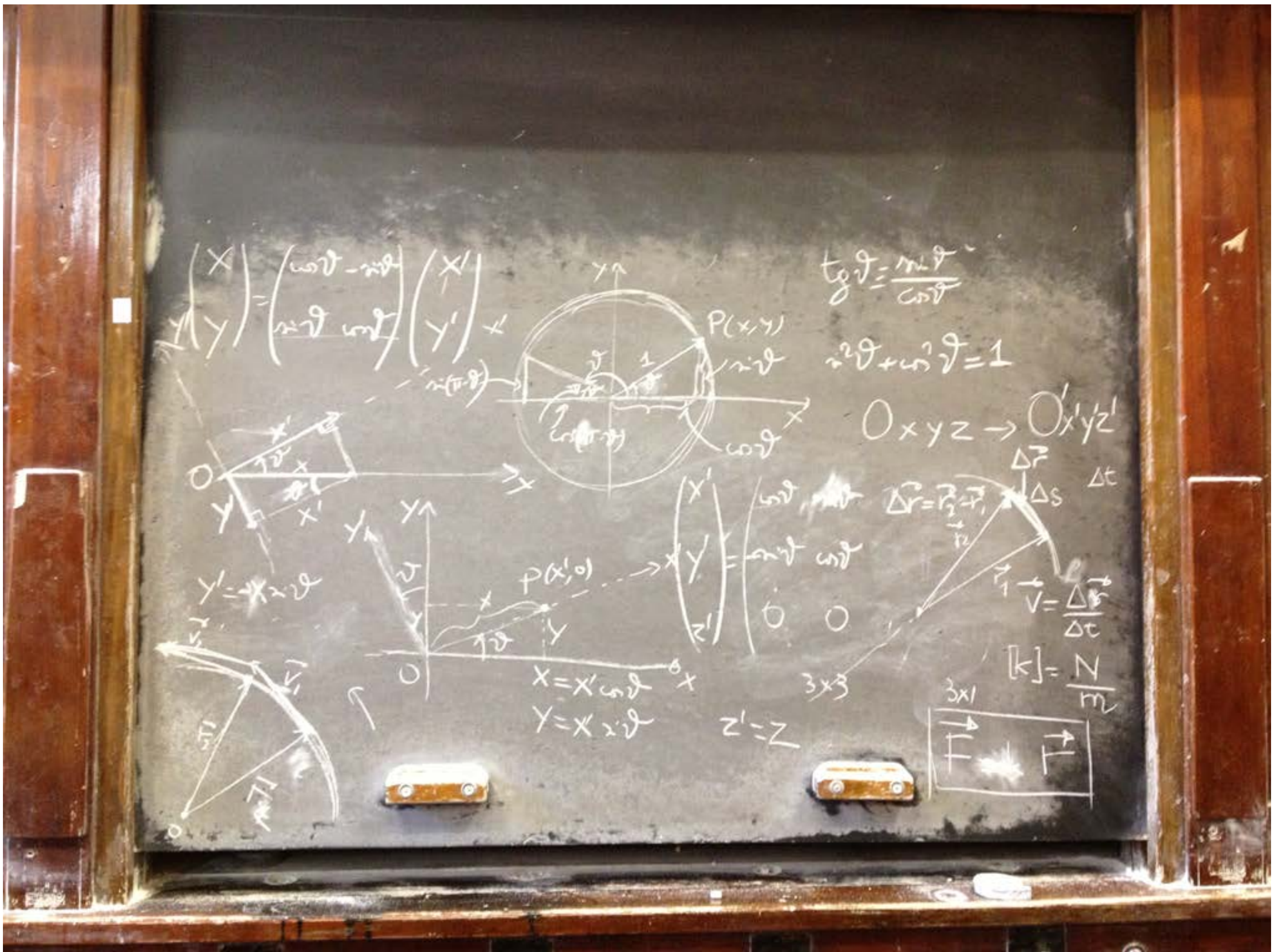



R ≃ 6400 km
1 Joule = kg m² s⁻² = 10³ 10⁴ g cm² s⁻² MKS
erg
= 10⁷ g cm² s⁻² CGS
= 10⁷ erg
1 Joule = 10⁷ erg
α = s/r
= 3.86 × 10⁸ m
= 1.4 × 10⁹ m
≃ 0.93 × 10⁻² rad

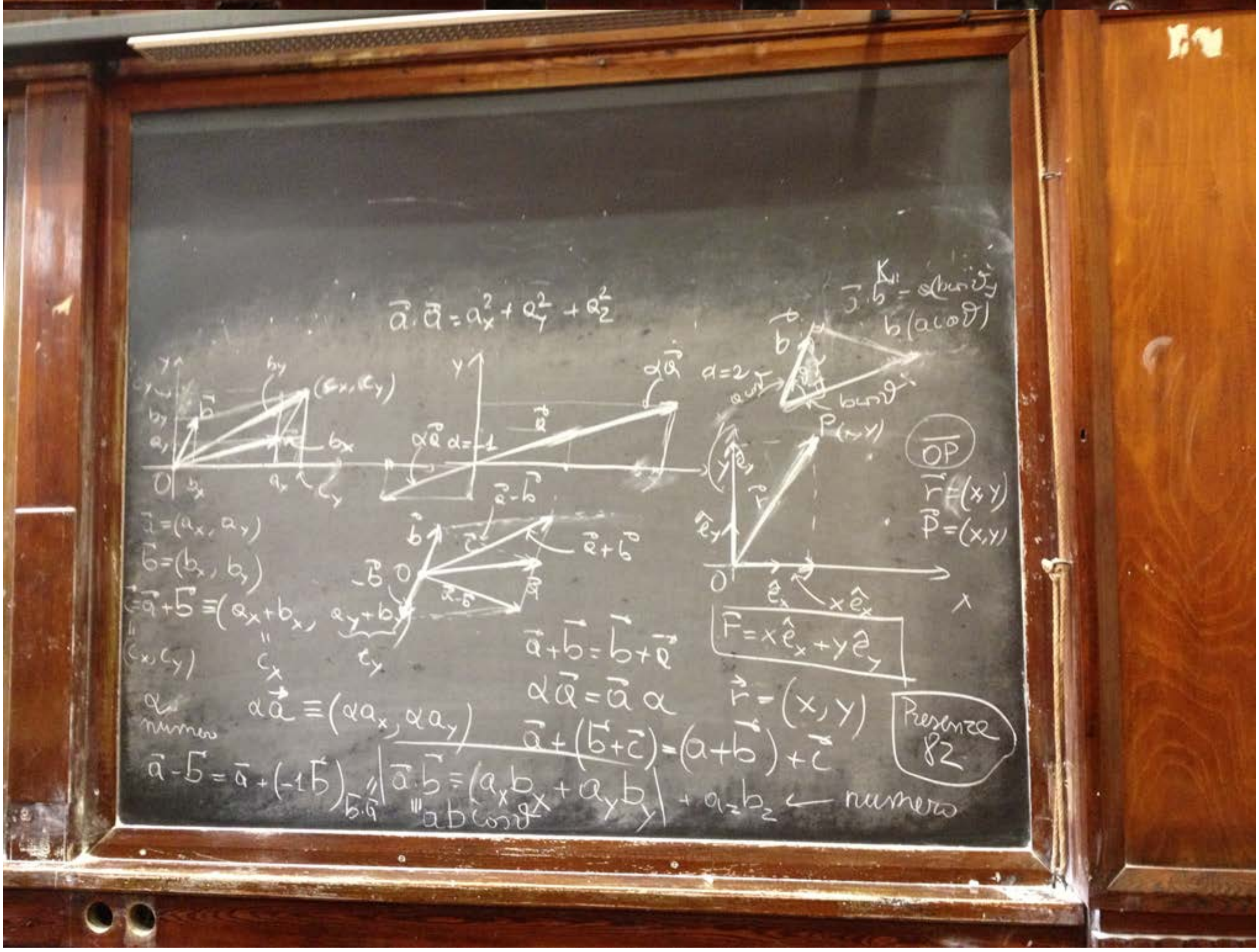
**24 Ottobre 2013**

Sistemi di coordinate e vettori; modulo e somma



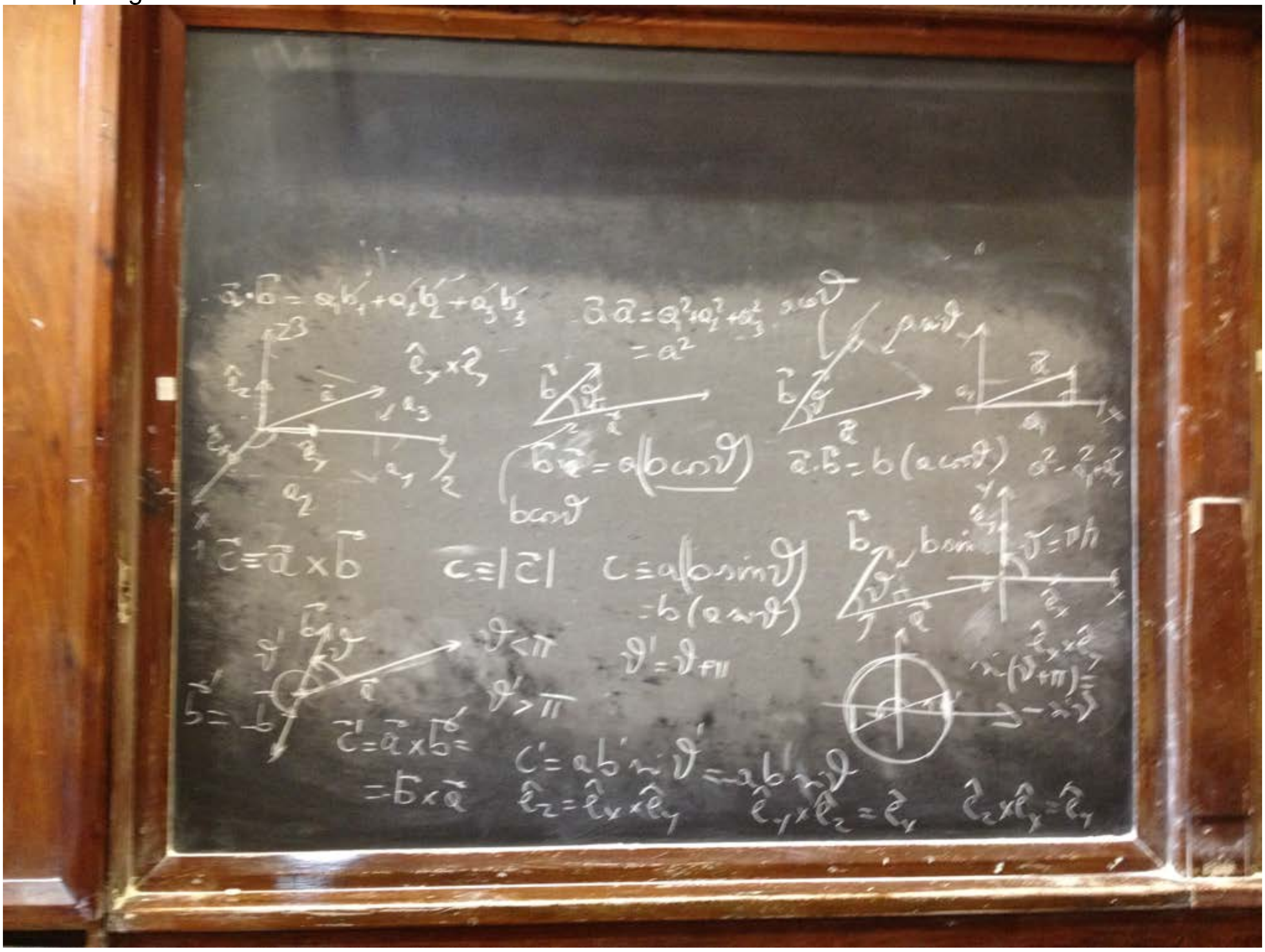


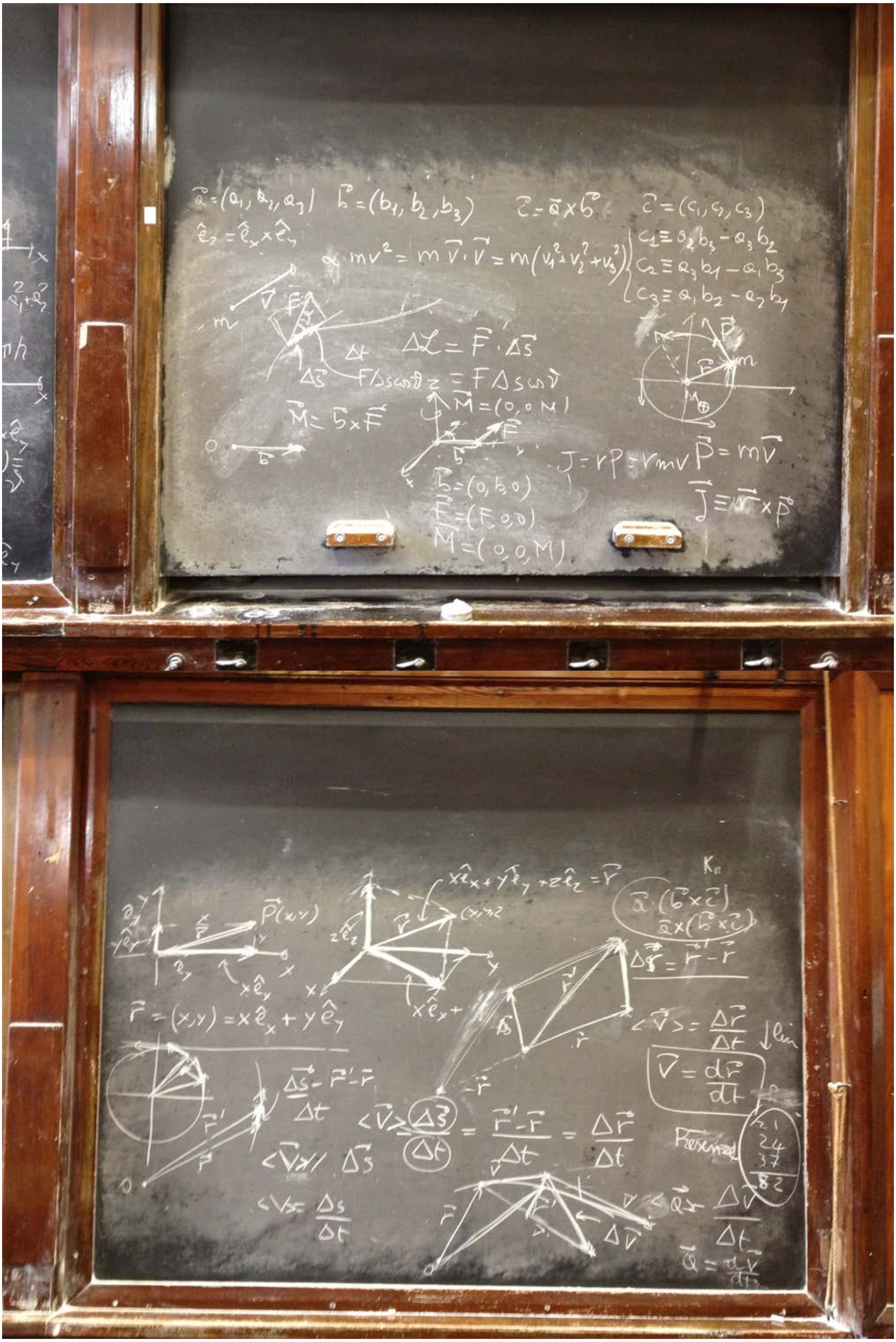
tg ϑ = sin ϑ / cos ϑ
sin²ϑ + cos²ϑ = 1
P(x,y)
Oxyz → O'x'y'z'
P(x',0)
X = X' cos ϑ
Y = X' sin ϑ
z' = z
3x3
3x1
[k] = N/m



a·a = ax² + ay² + az²
a + b = b + a
OP
r = (x,y)
P = (x,y)
F = x êx + y êy
r = (x,y)
Presenze 82
numero

**31 Ottobre 2013**
Prodotto scalare e prodotto vettore. Definizione e rappresentazione grafica
Perché i vettori?
Esempi di grandezze fisiche vettoriali

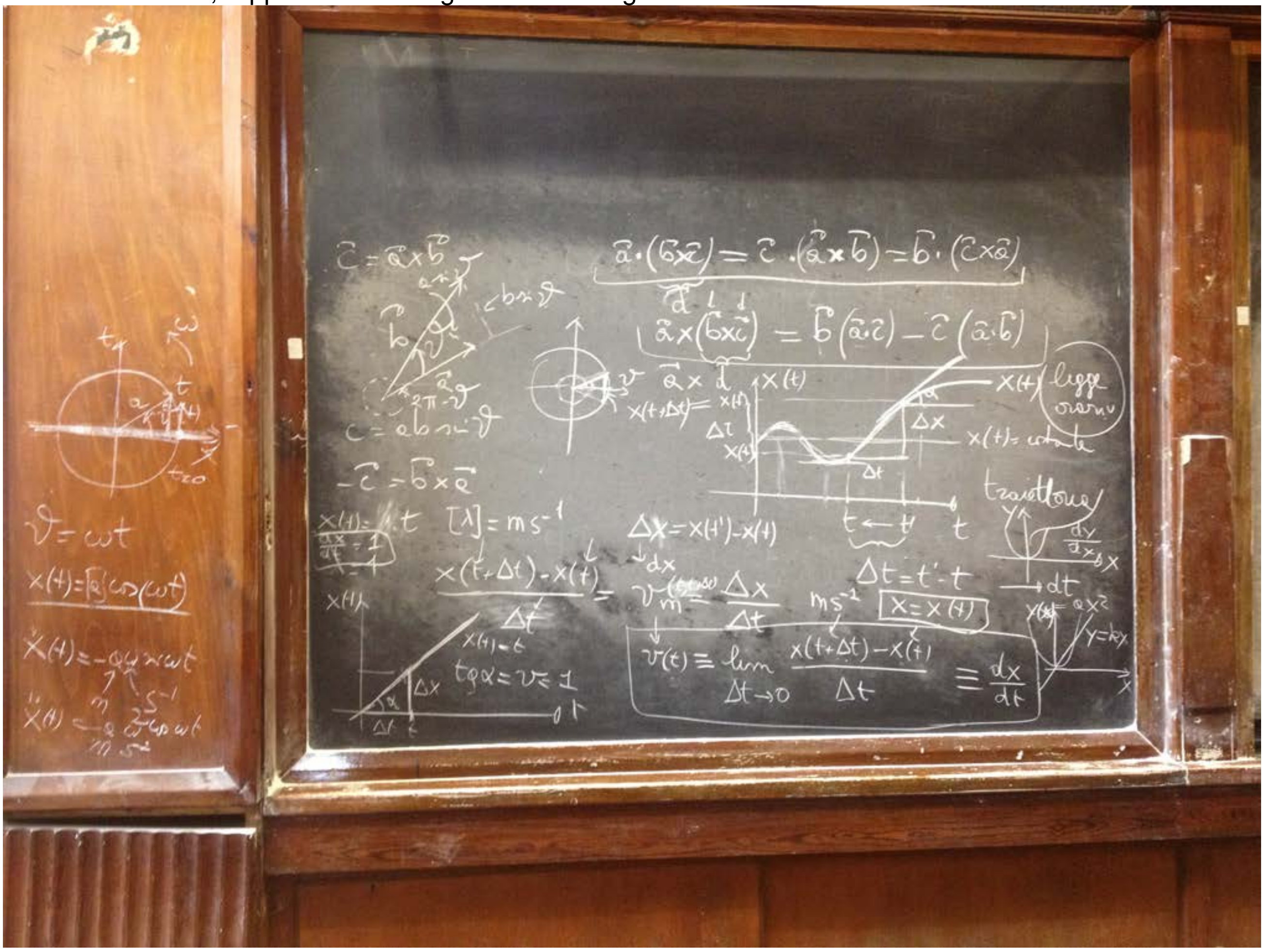


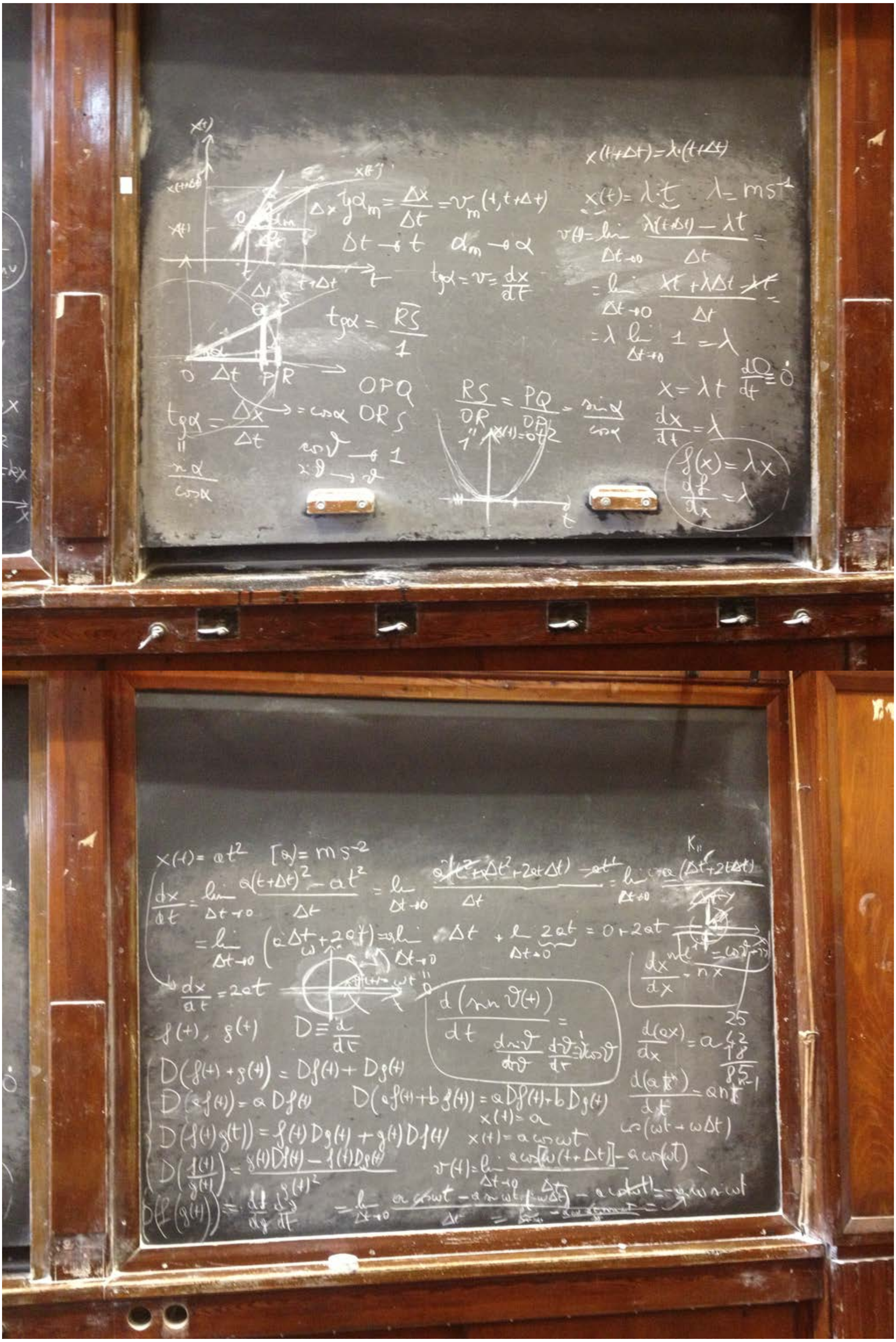

b = (b1, b2, b3)
c = (c1, c2, c3)
ΔL = F · Δs
M = (0, 0, M)
b = (0, b, 0)
F = (F, 0, 0)
r = (x,y) = x ê_x + y ê_y
V = dr/dt

**7 Novembre 2013**

Ancora sui vettori

Derivate: richiami, rappresentazione geometrica e significato fisico

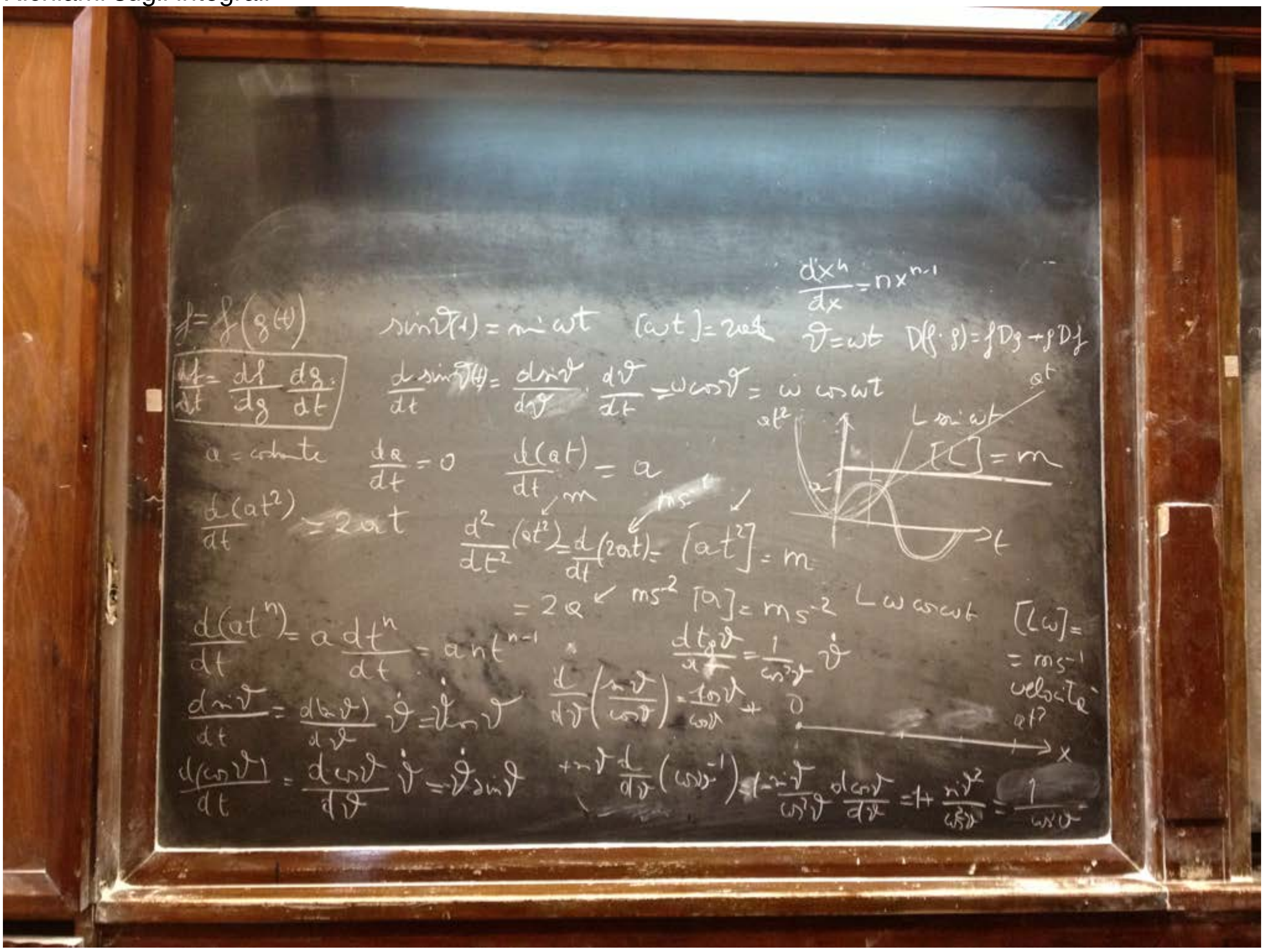


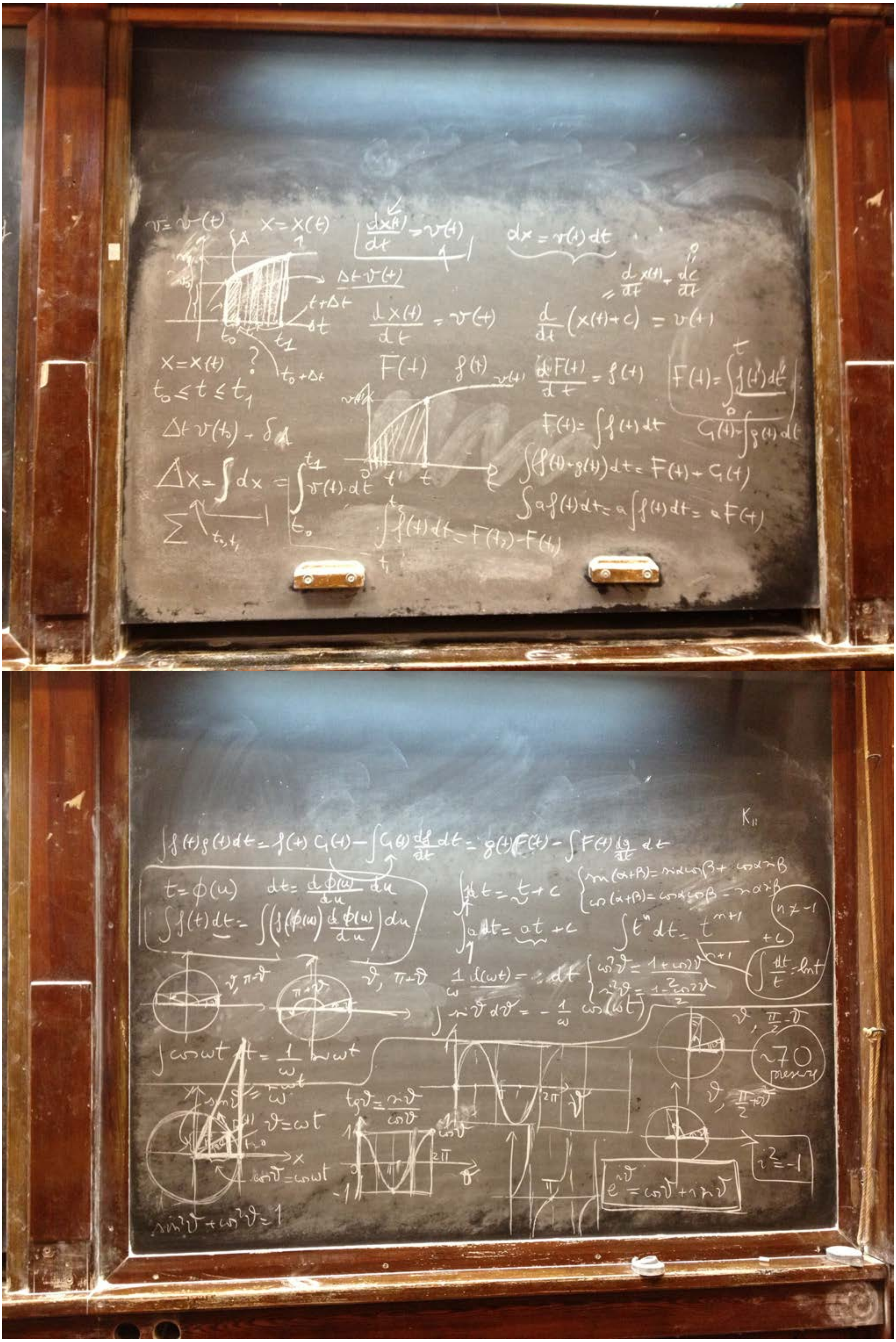

x(t)= λ·t λ= ms-1
tgα = RS/1
OPQ
ORS
dx/dt = λ
f(x)= λx
x(t)= at2 [a]= ms-2
dx/dt = 2at
f(t), g(t) D ≡ d/dt
D(f(t)+g(t)) = Df(t)+ Dg(t)
D(af(t)) = a Df(t)
D(af(t)+bg(t)) = aDf(t)+bDg(t)
D(f(t)g(t)) = f(t)Dg(t) + g(t)Df(t)
x(t)= a cos ωt

**21 Novembre 2013**

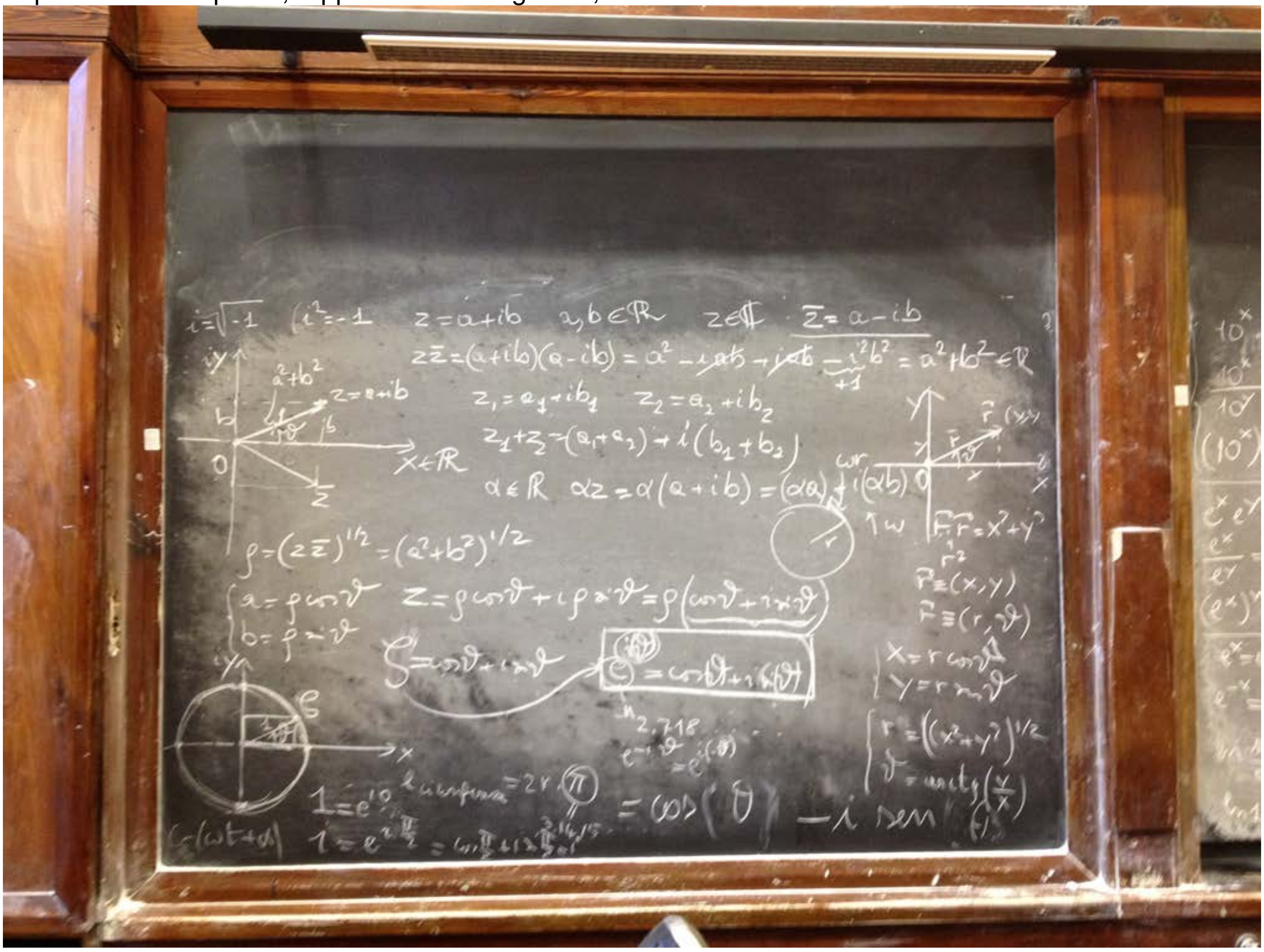
Ancora sulle derivate

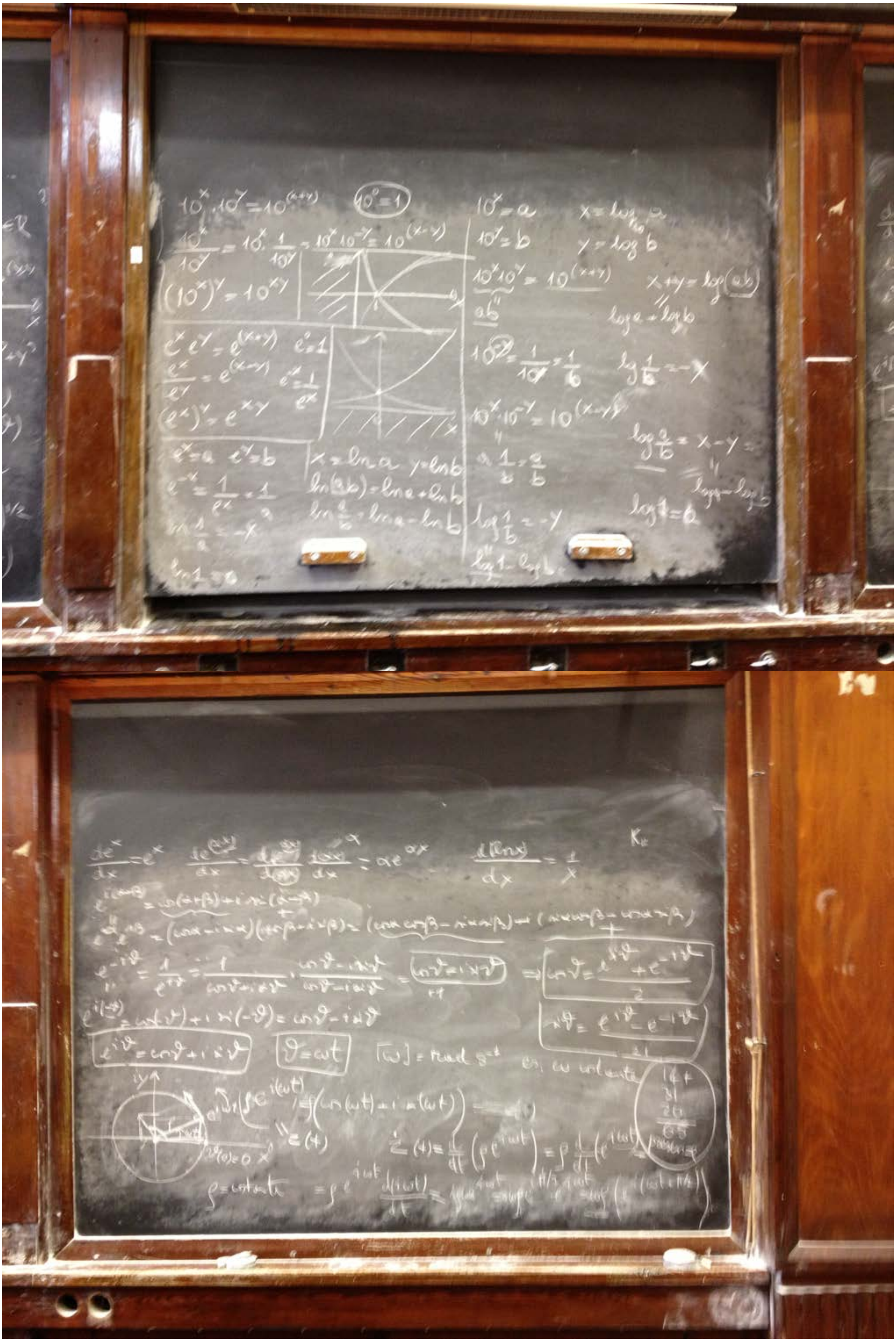
Richiami sugli integrali



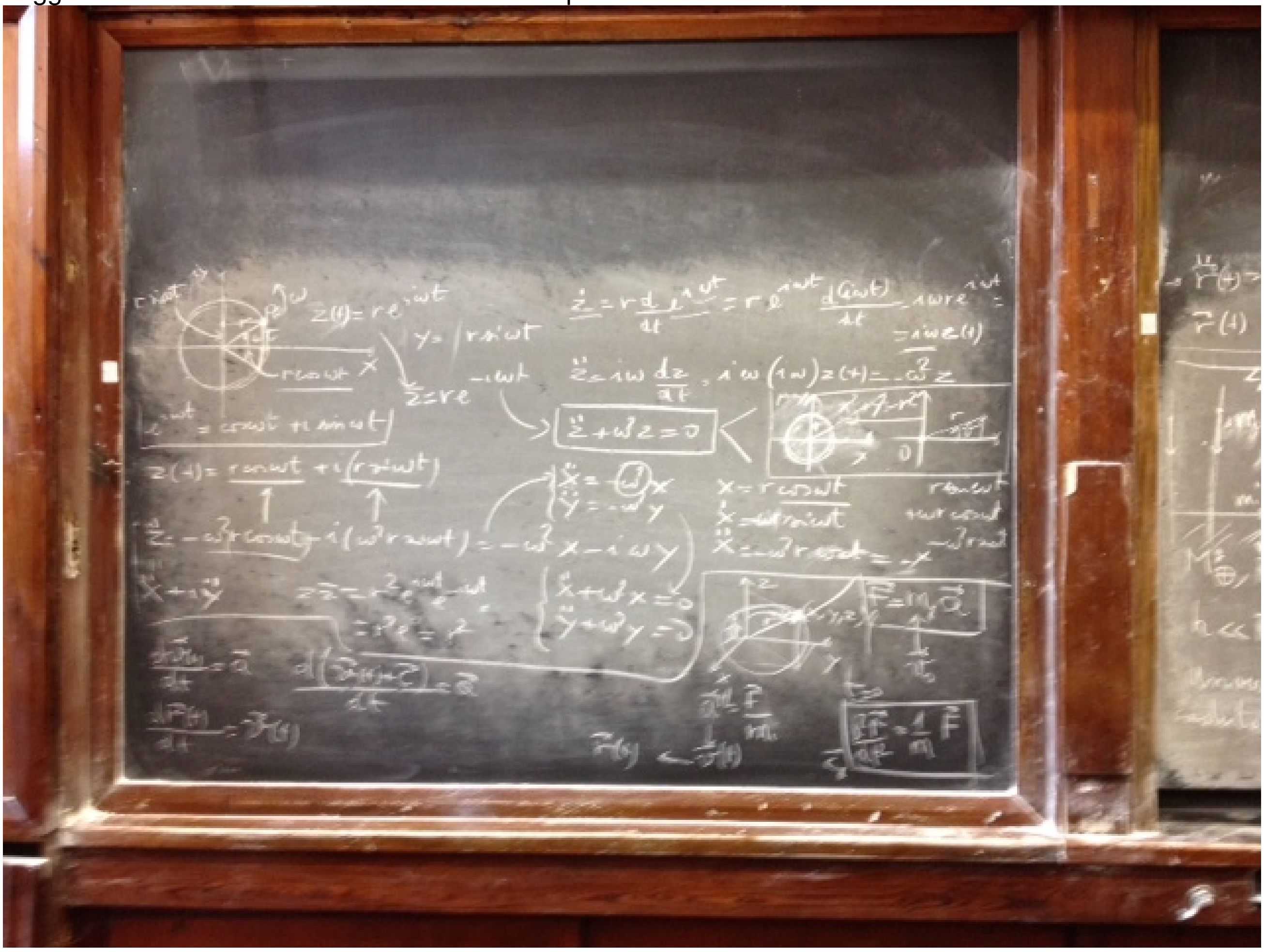

x = x(t)
F(t) = ∫ f(t) dt
∫ a f(t) dt = a ∫ f(t) dt = a F(t)
t = φ(u)
sin²ϑ + cos²ϑ = 1
ϑ = ωt
e^{iϑ} = cos ϑ + i sin ϑ
i² = −1
∼70 pressy

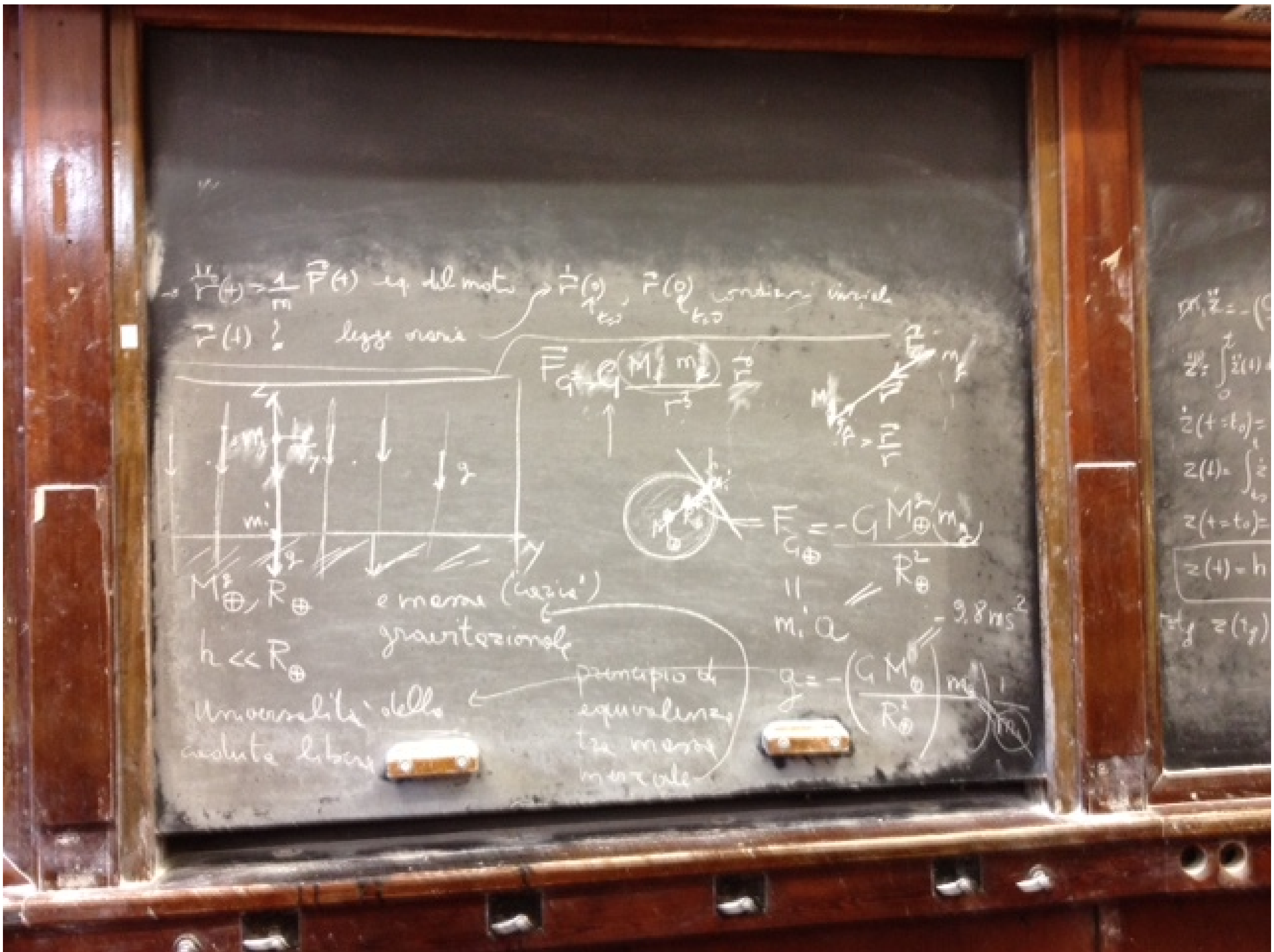
**28 Novembre 2013**
Richiami sui numeric complessi. Perché i numeri complessi?
Esponenziali complessi, rappresentazione grafica, relazione con i vettori e utilizzo in fisica.

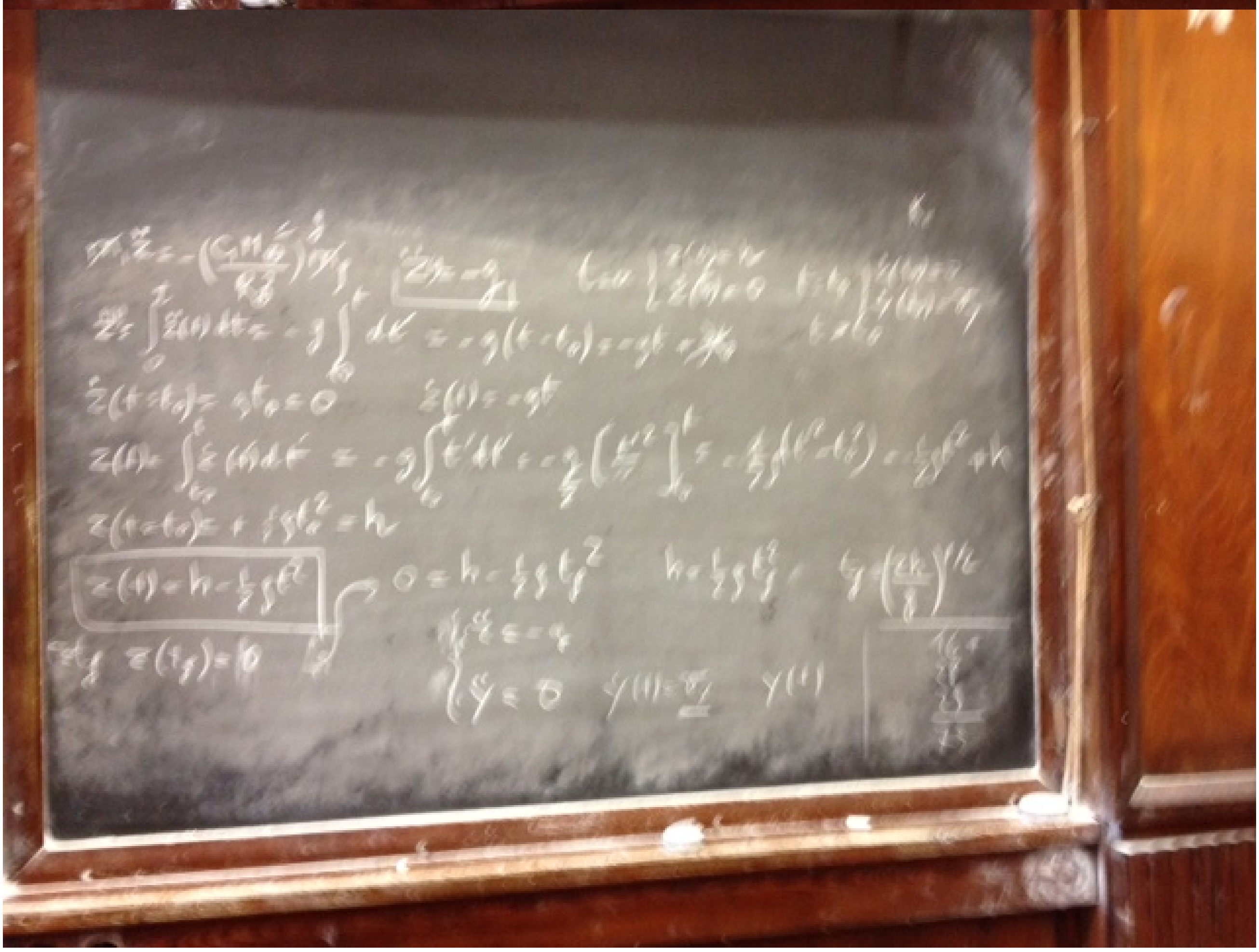




**5 Dicembre 2013**
Ancora sui numeri complessi
Legge fondamentale di Newton e concetto di equazione del moto

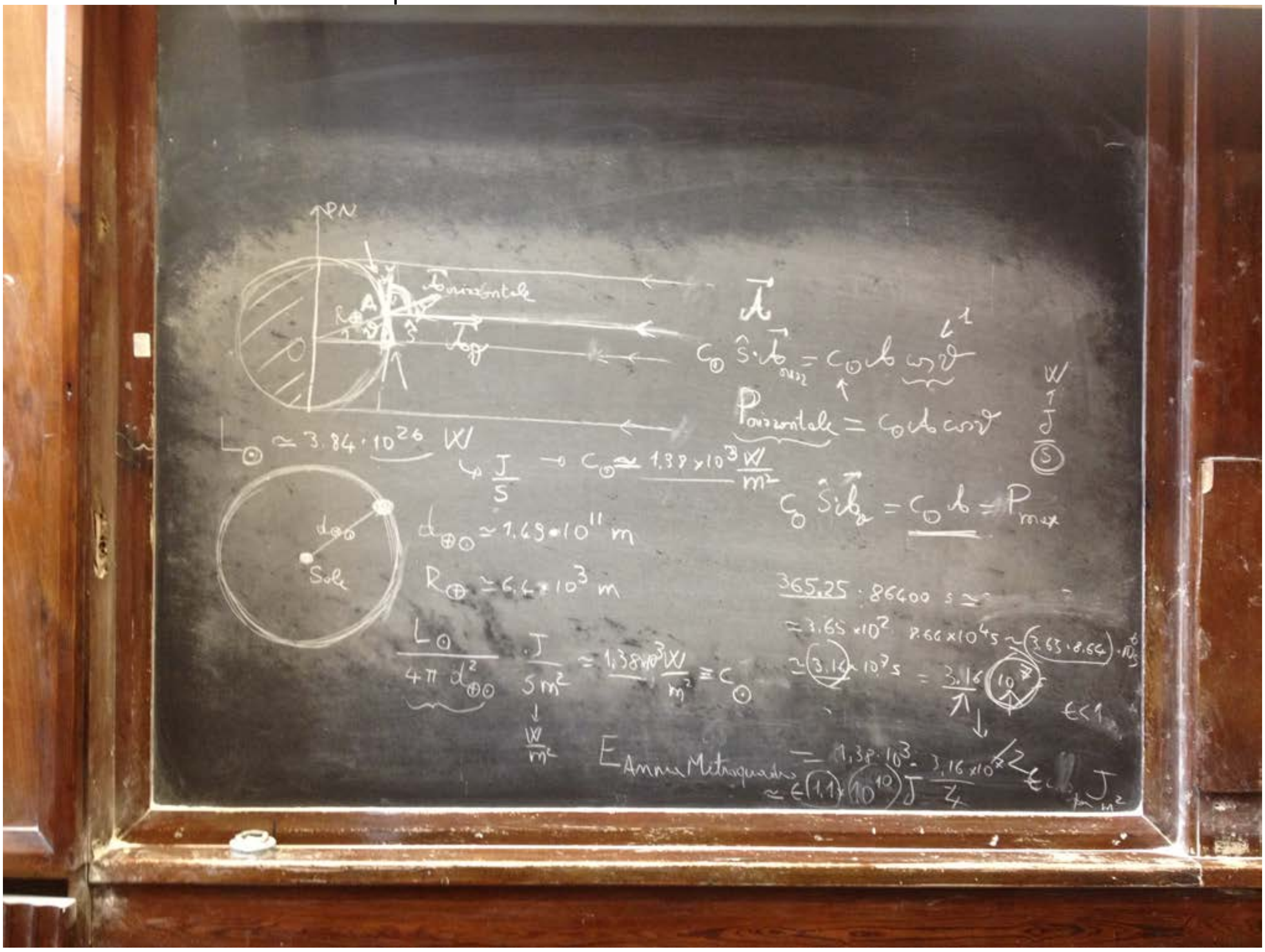


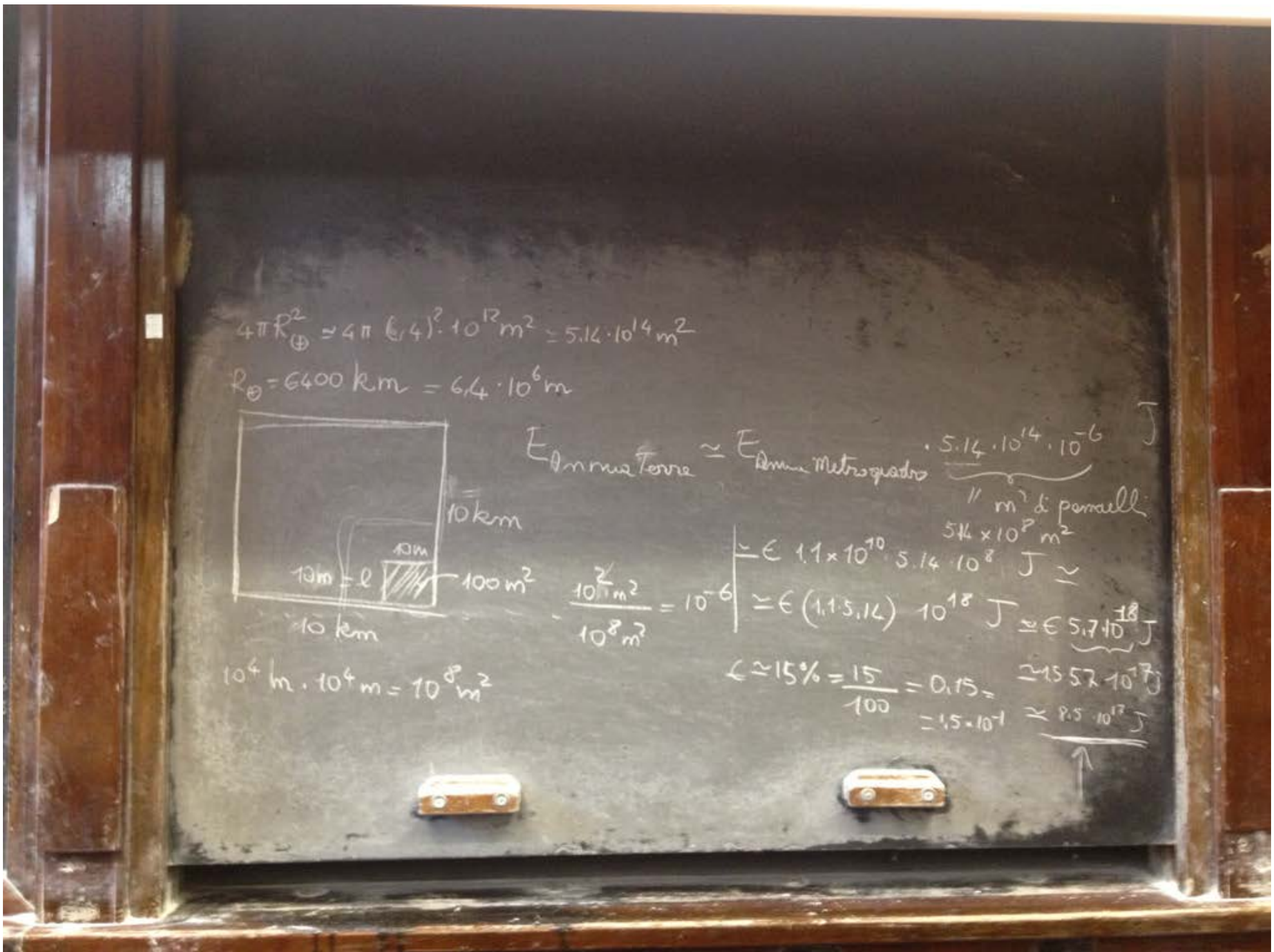

eq. del moto
condizioni iniziali
legge oraria
$h \ll R_\oplus$
e massa (carica) gravitazionale
principio di equivalenza tra massa inerziale
Universalità della caduta libera
$9.8\,ms^{-2}$


$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$

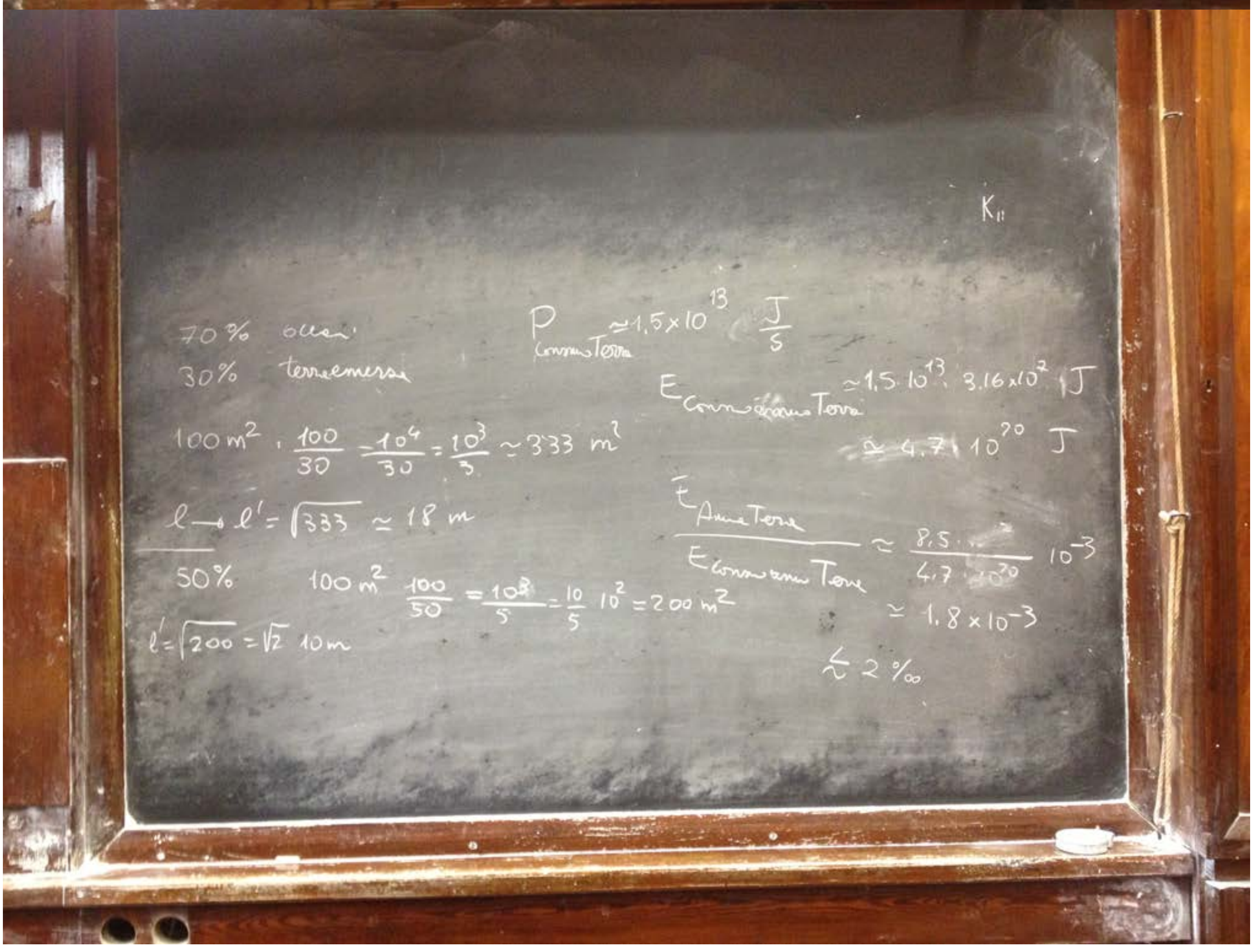
**12 Dicembre 2013: 1o compitino**

**19 Dicembre 2013**
Soluzione e discussione del compitino del 12 Dicembre





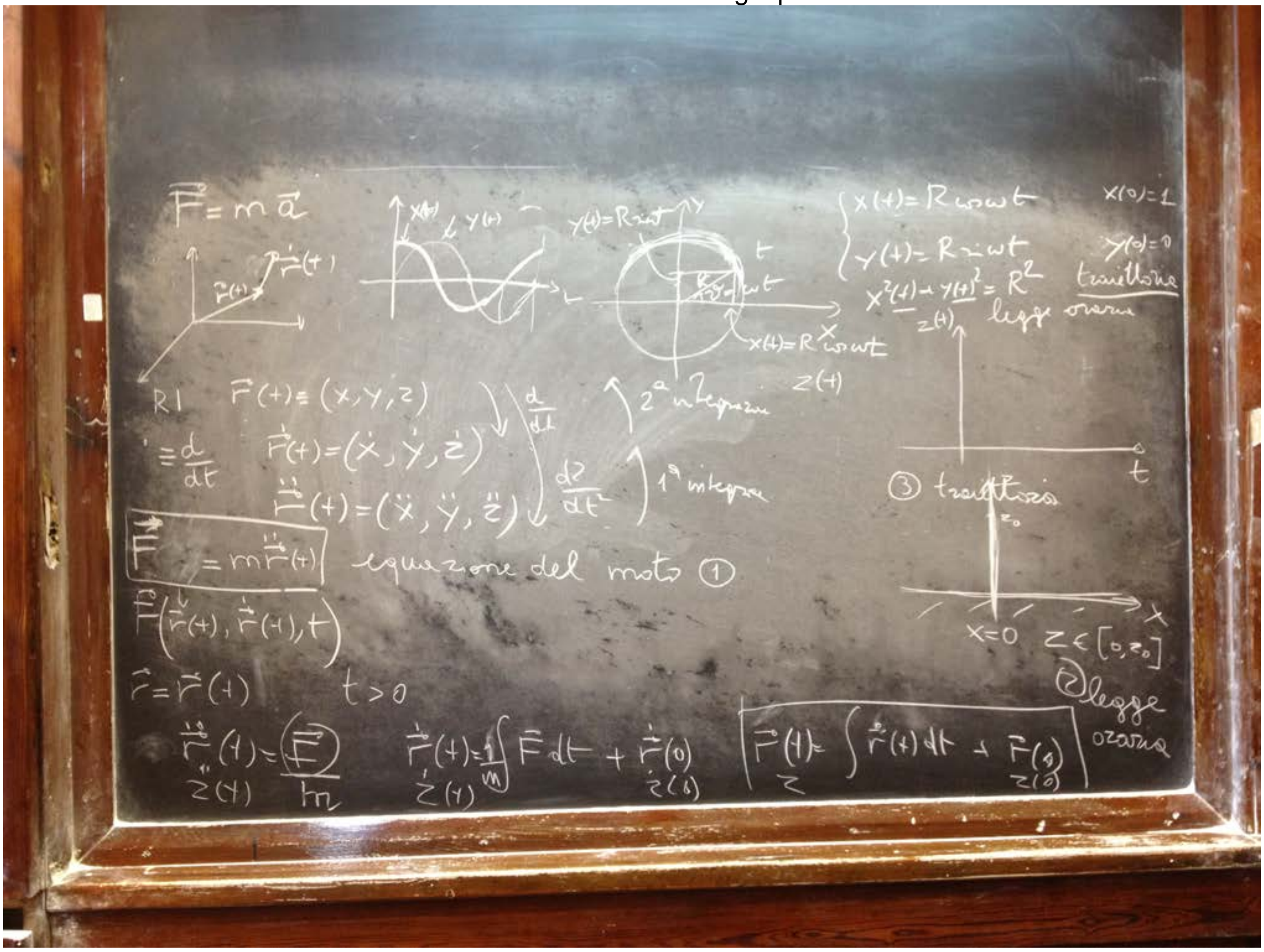
4πR⊕² ≃ 4π (6,4)² · 10¹² m² ≃ 5.14 · 10¹⁴ m²
R⊕ = 6400 km = 6,4 · 10⁶ m
10 km
10 m
10 m = ℓ
100 m²
10 km
10⁴ m · 10⁴ m = 10⁸ m²
E Anno Terra ≃ E Anno Metroquadro · 5.14 · 10¹⁴ · 10⁻⁶ J
" m² di pannelli
5.14 × 10⁸ m²
10² m² / 10⁸ m² = 10⁻⁶
≃ ε 1.1 × 10¹⁰ · 5.14 · 10⁸ J ≃
≃ ε (1.1 · 5.14) 10¹⁸ J ≃ ε 5.7 · 10¹⁸ J
ε ≃ 15% = 15/100 = 0,15 = 1,5 · 10⁻¹
≃ 1.5 5.7 · 10¹⁷ J
≃ 8.5 · 10¹⁷ J

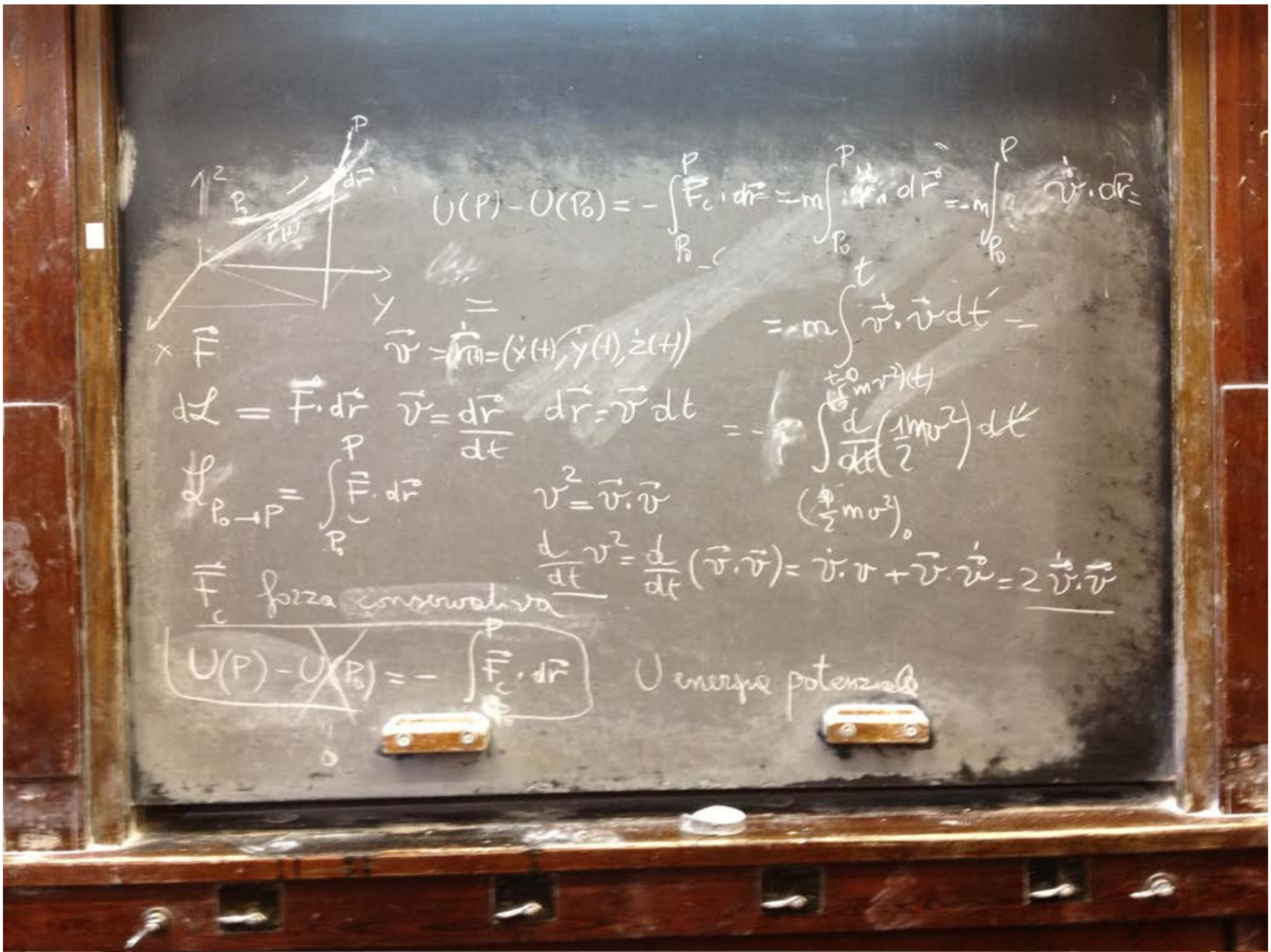
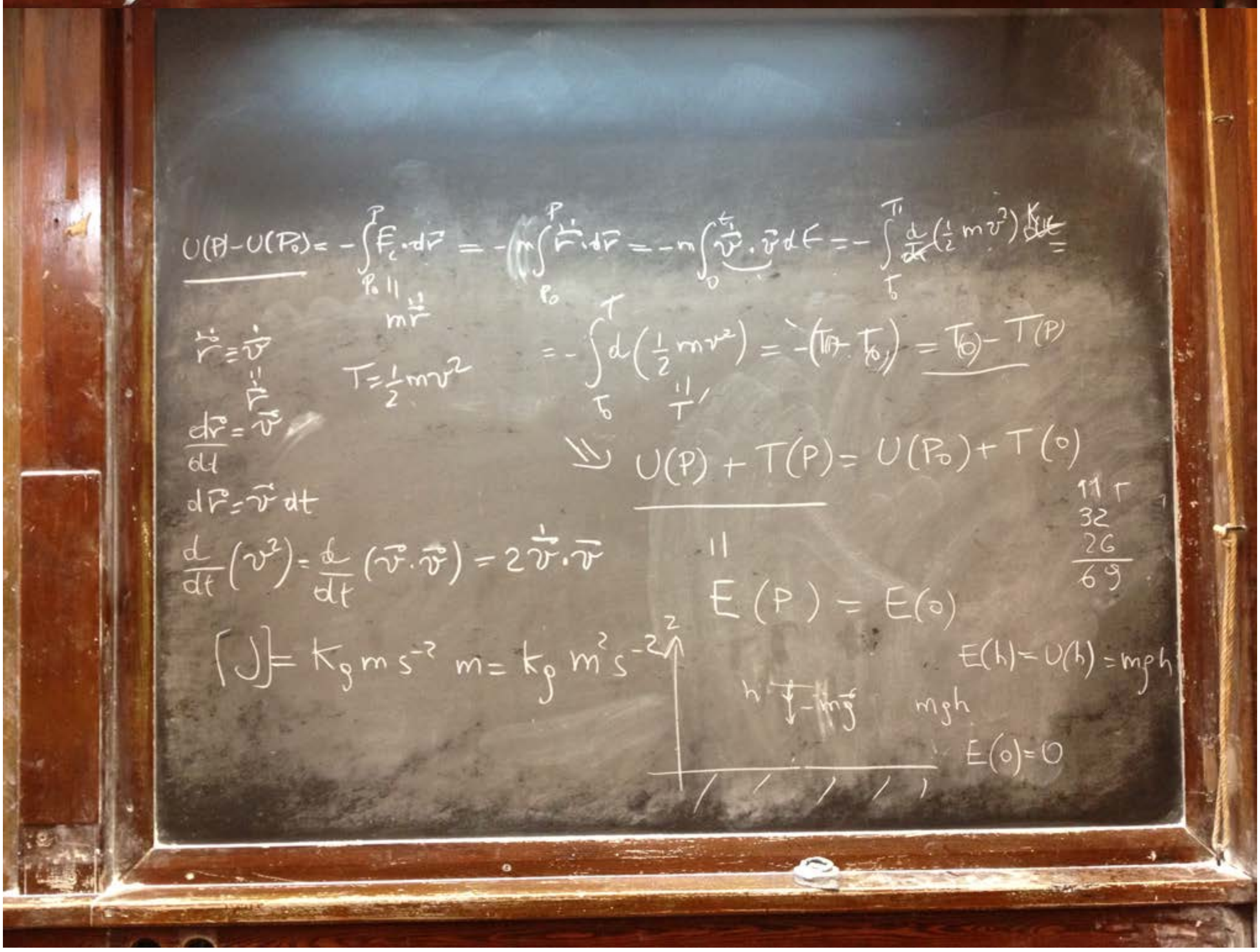


K11
70% oceani
30% terre emerse
100 m² · 100/30 = 10⁴/30 = 10³/3 ≃ 333 m²
ℓ → ℓ′ = √333 ≃ 18 m
50% 100 m² 100/50 = 10³/5 = 10/5 10² = 200 m²
ℓ′ = √200 = √2 10 m
P Consumo Terra ≃ 1,5 × 10¹³ J/s
E Consumo Annuo Terra ≃ 1,5 · 10¹³ · 3.16 × 10⁷ J
≃ 4.7 · 10²⁰ J
E Anno Terra / E Consumo anno Terra ≃ 8,5 / 4.7 10⁻³
≃ 1.8 × 10⁻³
≲ 2 ‰

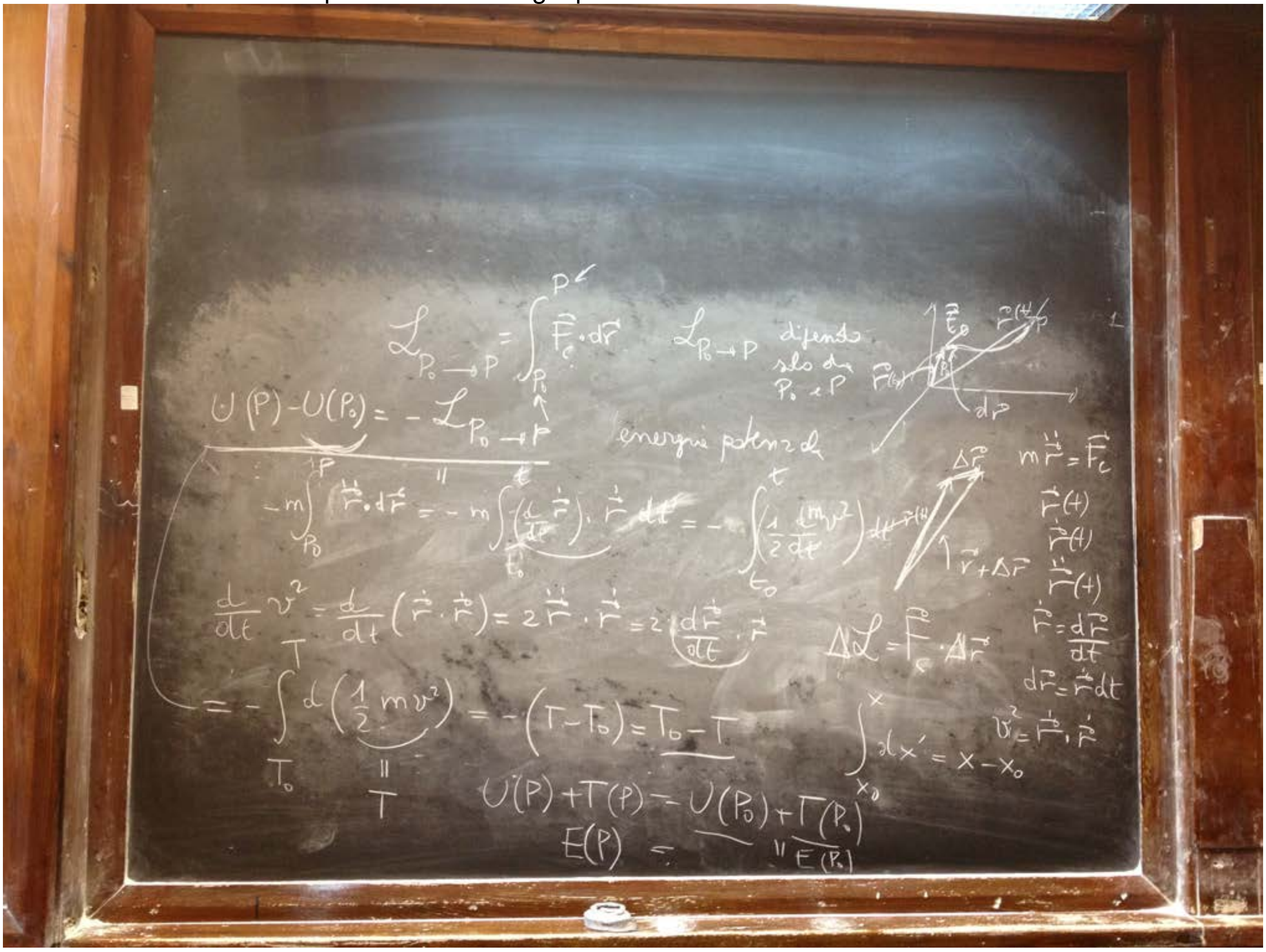
**11 Febbraio 2014**

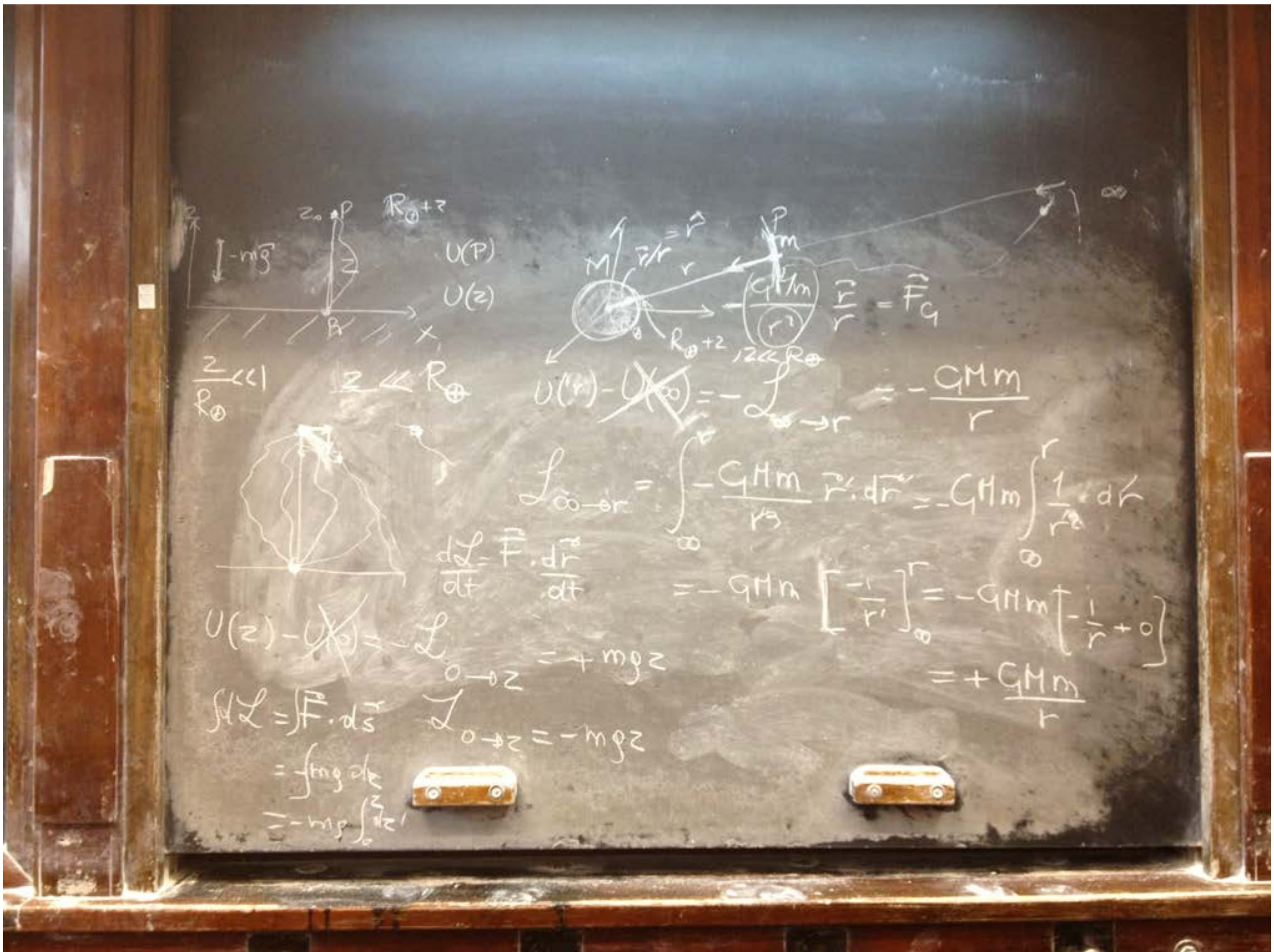
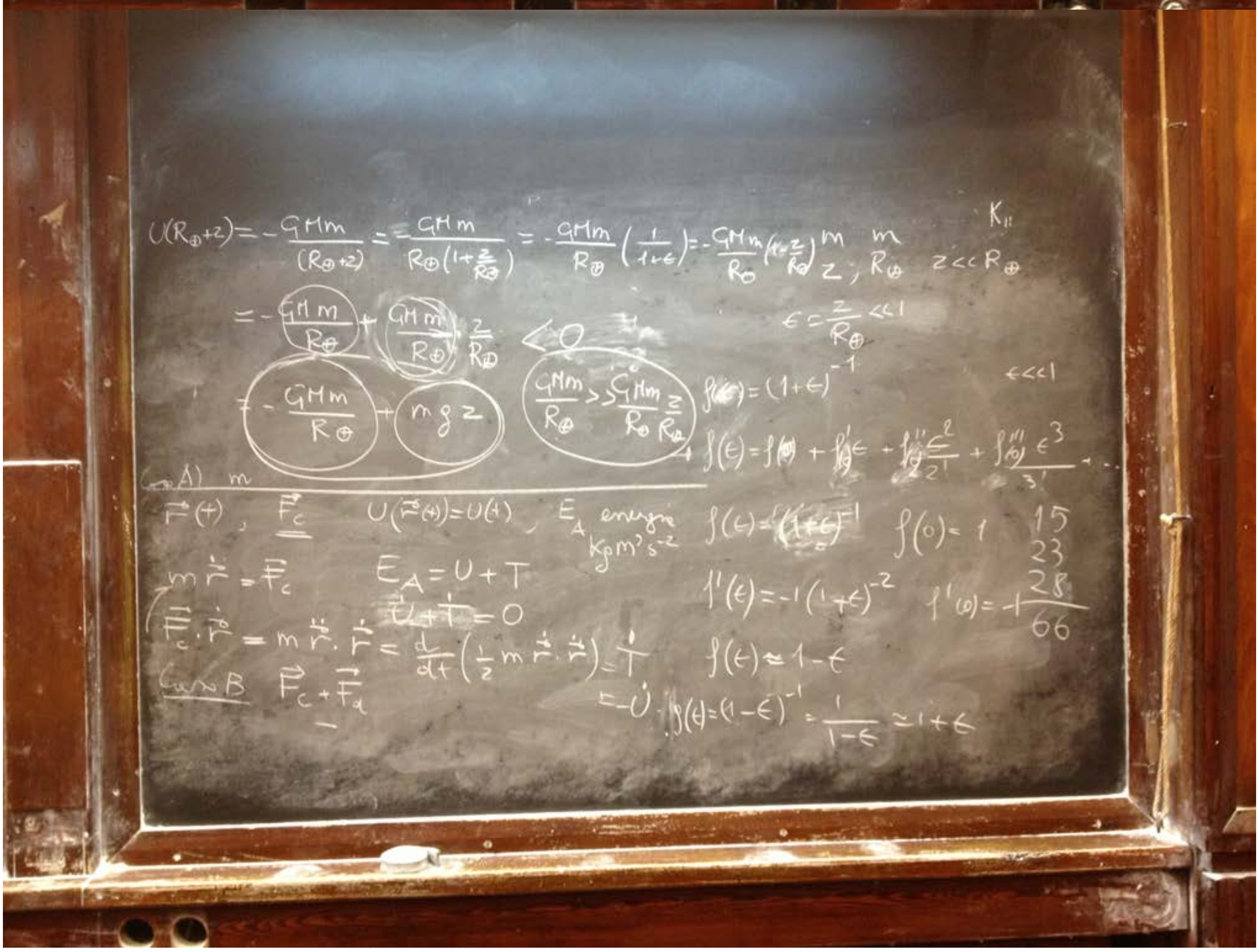
Equazioni del moto di corpi puntiformi in un riferimento inerziale.
Integrazione delle equazioni del moto. Concetti di legge oraria e di traiettoria.
Definizione di lavoro. Forze conservative e definizione di energia potenziale.




U(P) - U(P0) = - ∫ Fc · dr = -m ∫ ... · dr = -m ∫ v · dr =
= -m ∫ v · v dt =
v = r(t) = (x(t), y(t), z(t))
dL = F · dr   v = dr/dt   dr = v dt
L P0→P = ∫ F · dr
v² = v · v
d/dt v² = d/dt (v · v) = v · v + v · v = 2 v · v
Fc forza conservativa
U(P) - U(P0) = - ∫ Fc · dr
U energia potenziale

U(P) - U(P0) = - ∫ Fc · dr = -m ∫ r · dr = -m ∫ v · v dt = - ∫ d/dt (1/2 m v²) dt =
r = v
T = 1/2 m v²
= - ∫ d(1/2 m v²) = -(T(P) - T(0)) = T(0) - T(P)
dr/dt = v
dr = v dt
d/dt (v²) = d/dt (v · v) = 2 v · v
U(P) + T(P) = U(P0) + T(0)
E(P) = E(0)
[J] = Kg m s⁻² m = Kg m² s⁻²
E(h) = U(h) = mgh
mgh
E(0) = 0

**13 Febbraio 2014**
Energia potenziale. Scelta del livello di riferimento.
Calcolo della energia potenziale gravitazionale di un corpo sulla superficie della Terra oppure molto lontano da essa: confronto del segno e del valore e dimostrazione che non c'è contraddizione tra le formule usate nei due casi per definire l'energia potenziale.



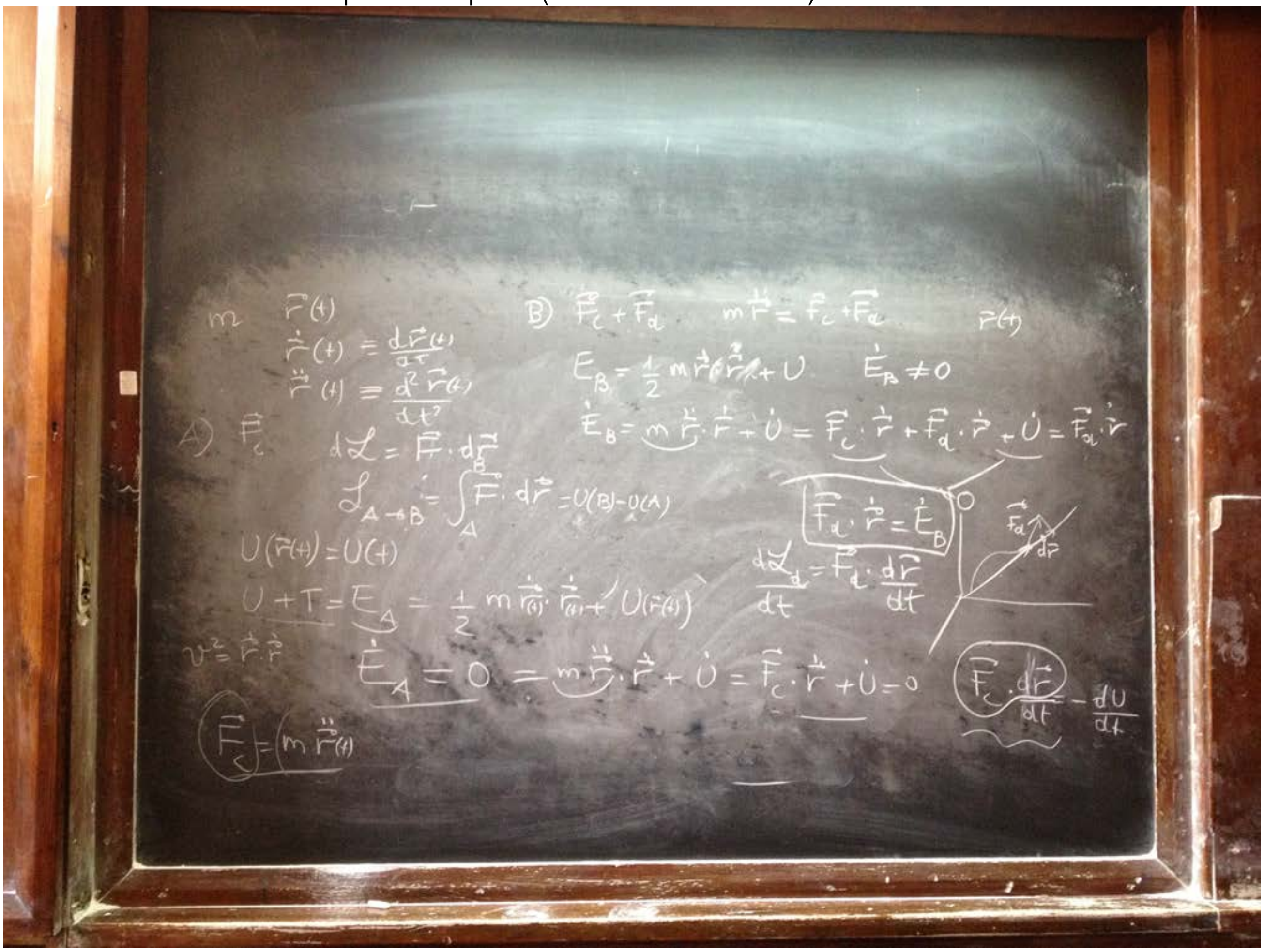

U(P)
U(z)
z << R⊕
U(r) - U(∞) = -𝓛∞→r = -GMm/r
= +GMm/r
U(z) - U(0) = -𝓛0→z = +mgz
𝓛0→z = -mgz

ε = z/R⊕ << 1
f(ε) = (1+ε)^-1
f(ε) ≃ 1 - ε
EA = U + T
energie
Kg m² s^-2

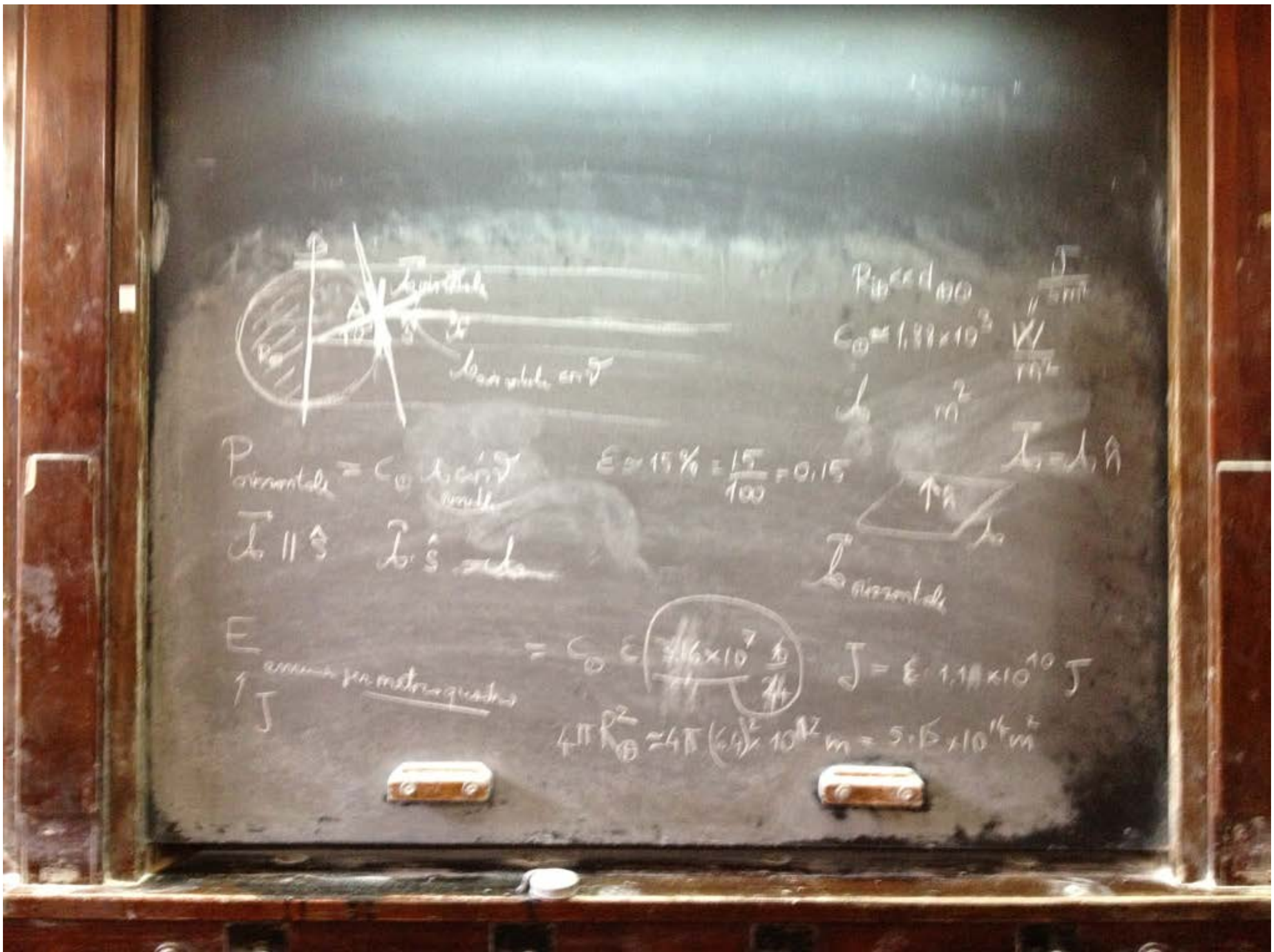
**18 Febbraio 2014**

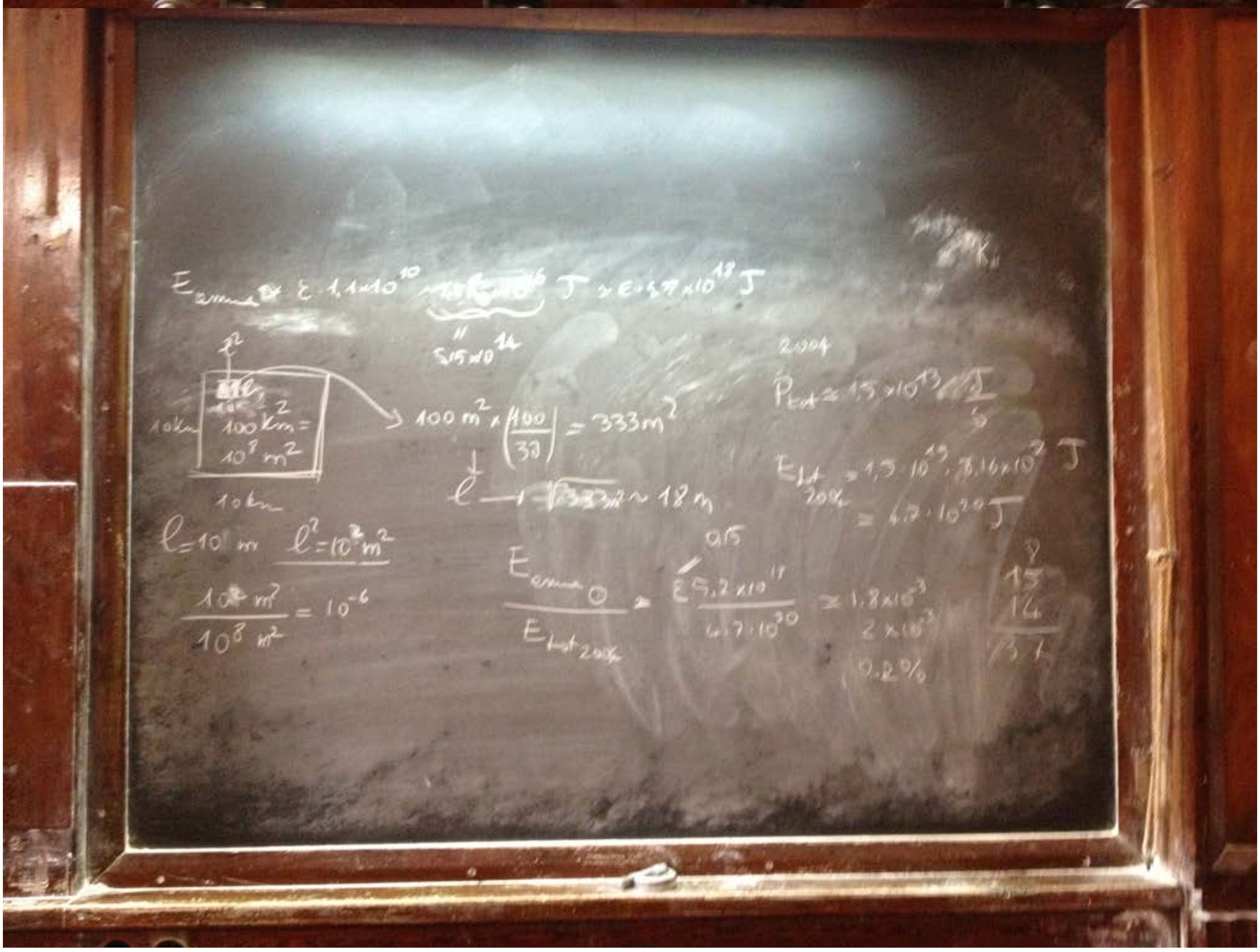
Corpo soggetto solo a forza conservativa oppure a forza conservativa più dissipativa. Calcolo del lavoro fatto nell'unità di tempo dalla forza conservativa.

Calcolo del lavoro fatto nell'unità di tempo dalla forza dissipativa.

Di nuovo sulla soluzione del primo compitino (del 12 dicembre 2013)




$\varepsilon \simeq 15\% = \frac{15}{100} = 0.15$
$4\pi R_\oplus^2$
$5.15\times10^{14}\,m^2$

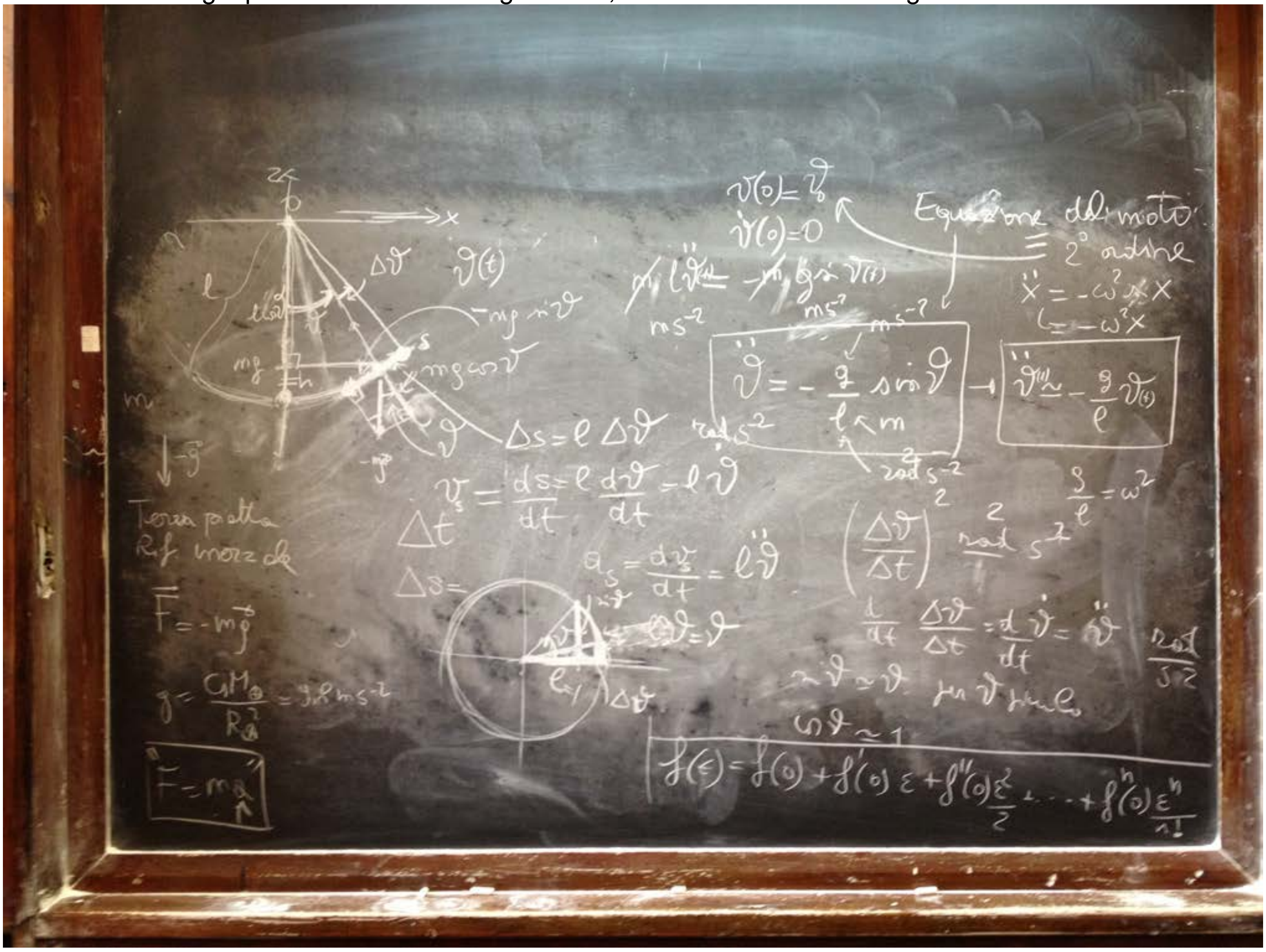

$100\,km^2 = 10^8\,m^2$
10 km
$\ell = 10\,m$ $\ell^2 = 10^2\,m^2$
$\frac{10^2\,m^2}{10^8\,m^2} = 10^{-6}$
$= 333\,m^2$
$\sim 18\,m$
2004
0.2%

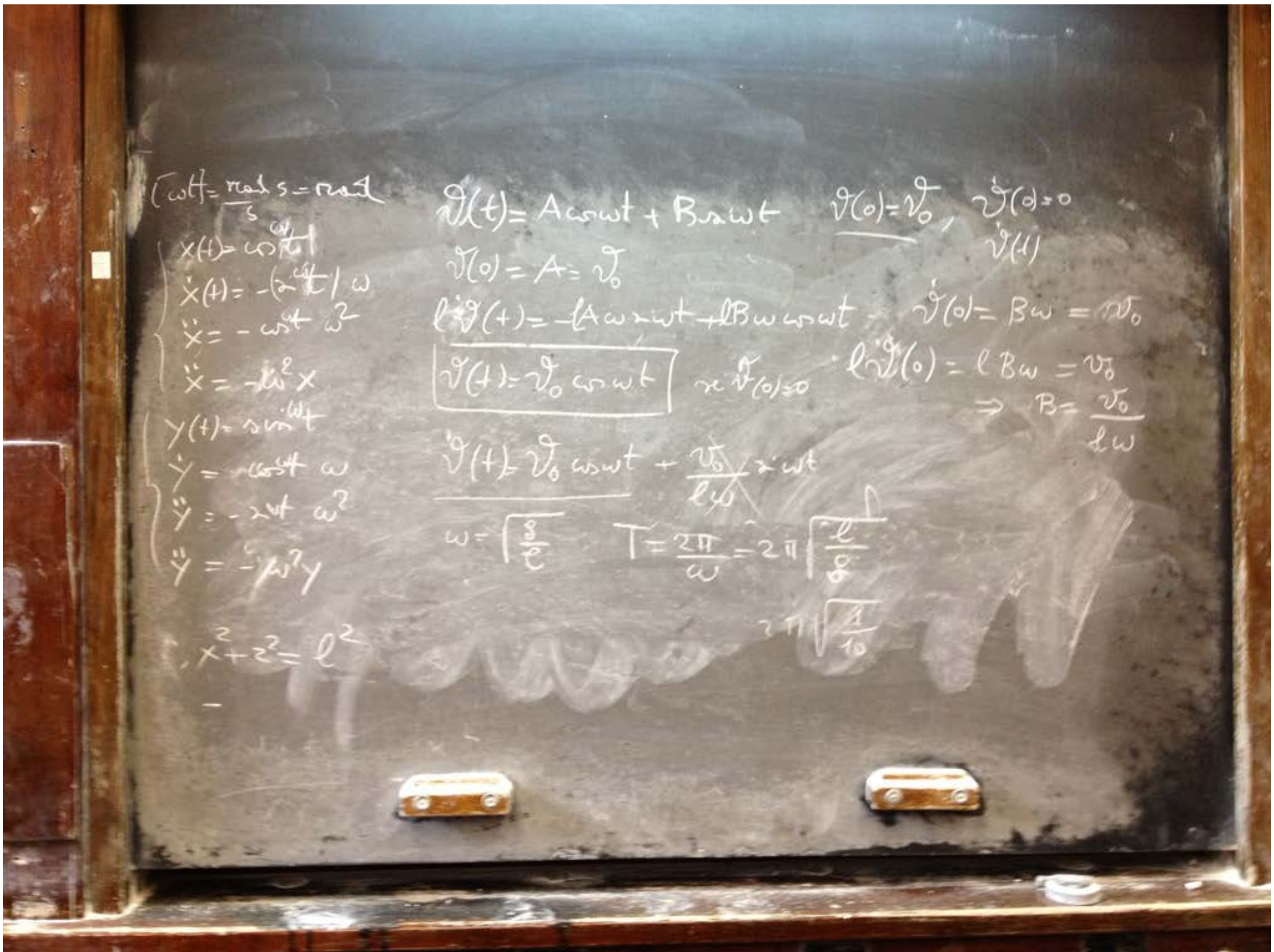
**<u>20 Febbraio 2014</u>**

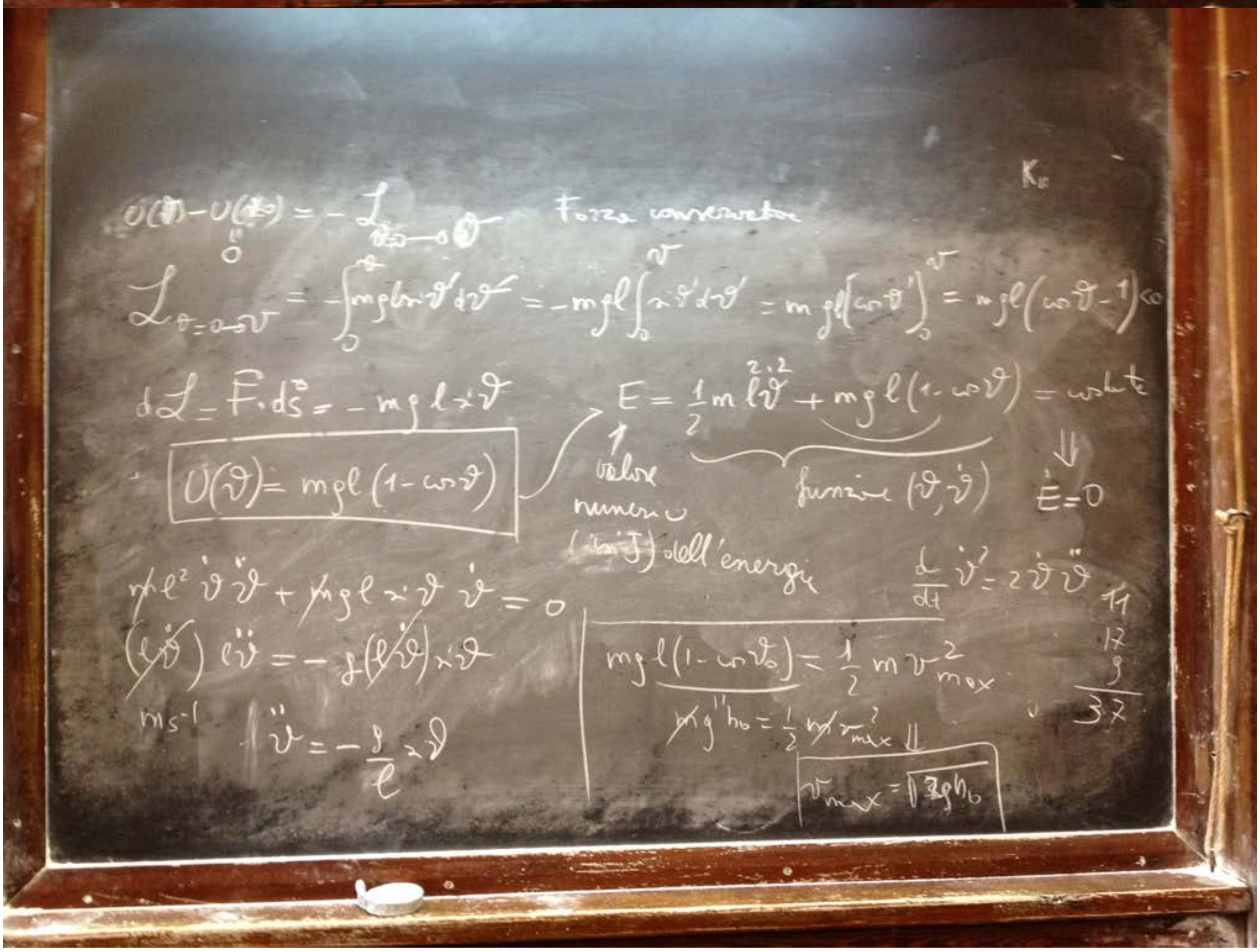
Equazione del moto del pendolo semplice

Soluzione nel caso delle piccole oscillazioni (richiamo sulla espansione in serie di Taylor)

Calcolo dell’energia potenziale e dell’energia totale, conservazione dell’energia.




ϑ(t) = A cos ωt + B sin ωt
ϑ(0) = ϑ₀
ϑ(0) = A = ϑ₀
B = v₀ / ℓω
T = 2π/ω = 2π √(ℓ/g)
x² + z² = ℓ²


Forza conservativa
U(ϑ) = mgℓ (1 - cos ϑ)
valore
numerico
dell'energia
funzione (ϑ, ϑ̇)
Ė = 0

**<u>25 Febbraio 2014</u>**

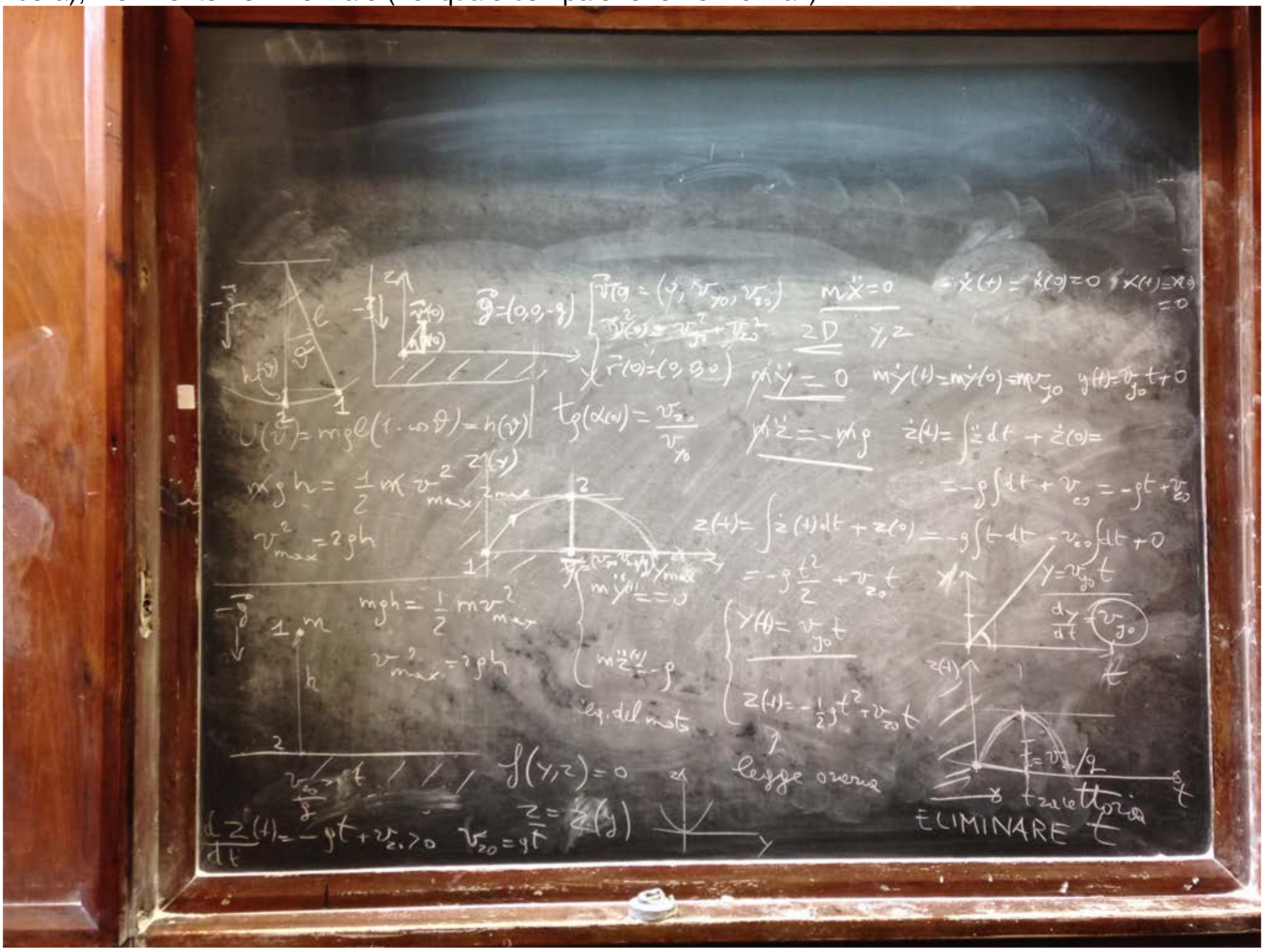
Conservazione energia nel caso del pendolo e del corpo in caduta

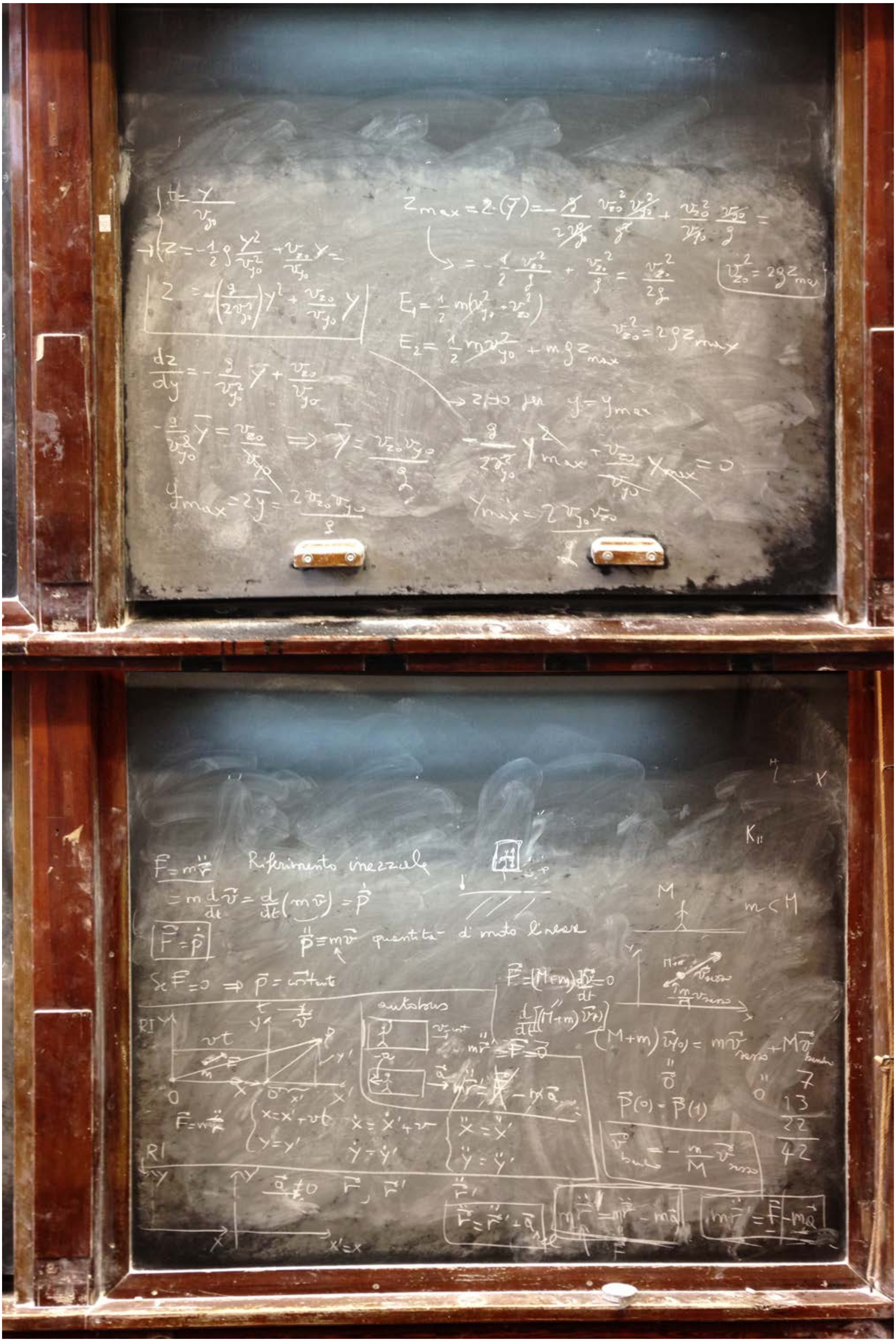
Moto del proiettile (terra piatta non rotante; riferimento inerziale): soluzione completa del problema (gradi di libertà; equazioni del moto; loro integrazione e legge oraria; equazione della traiettoria; uso della conservazione dell'energia)

Equazione di Newton e conservazione della quantità di moto lineare: problema del bambino sul lago ghiacciato

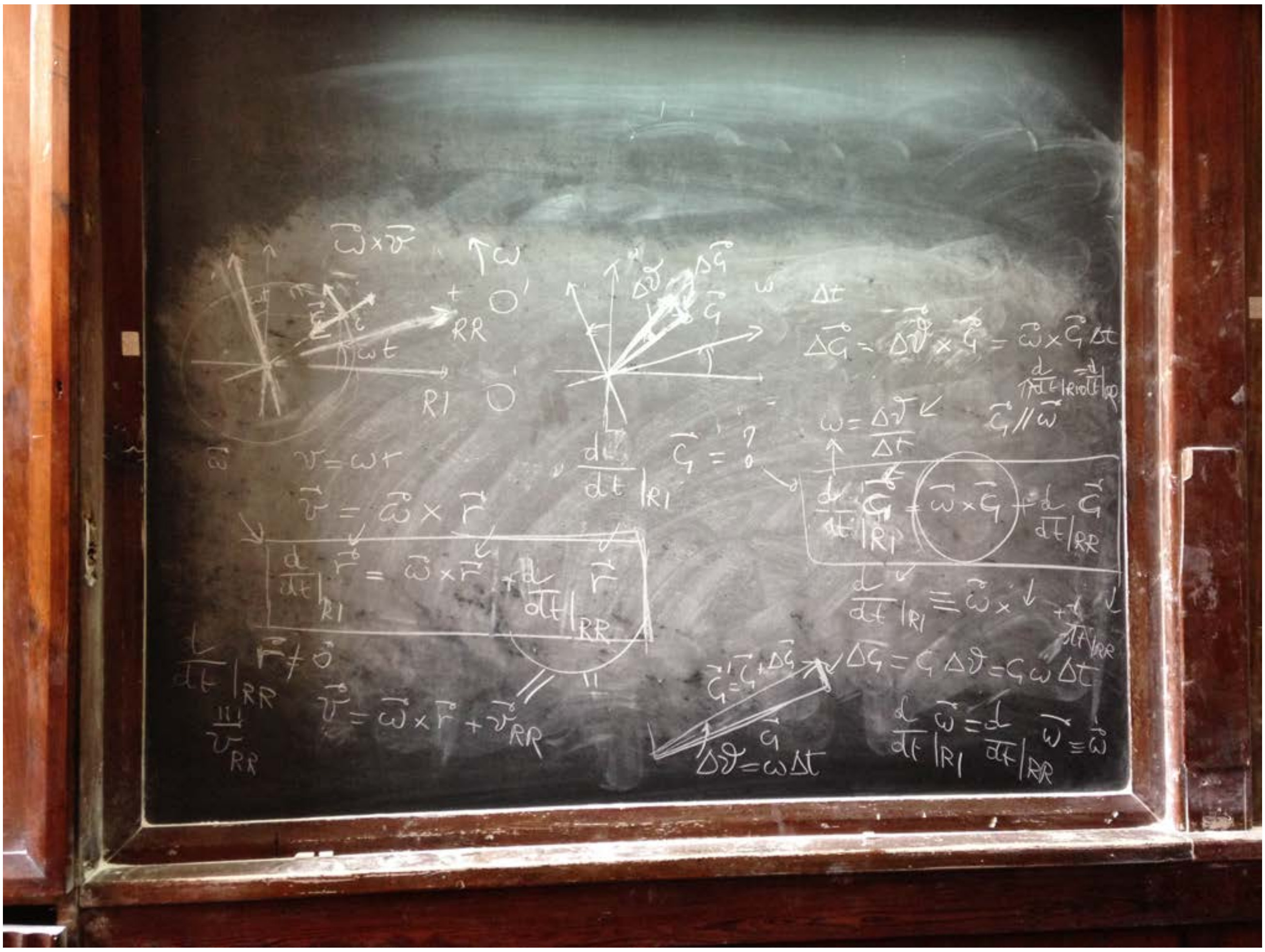
Riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto ad un RI

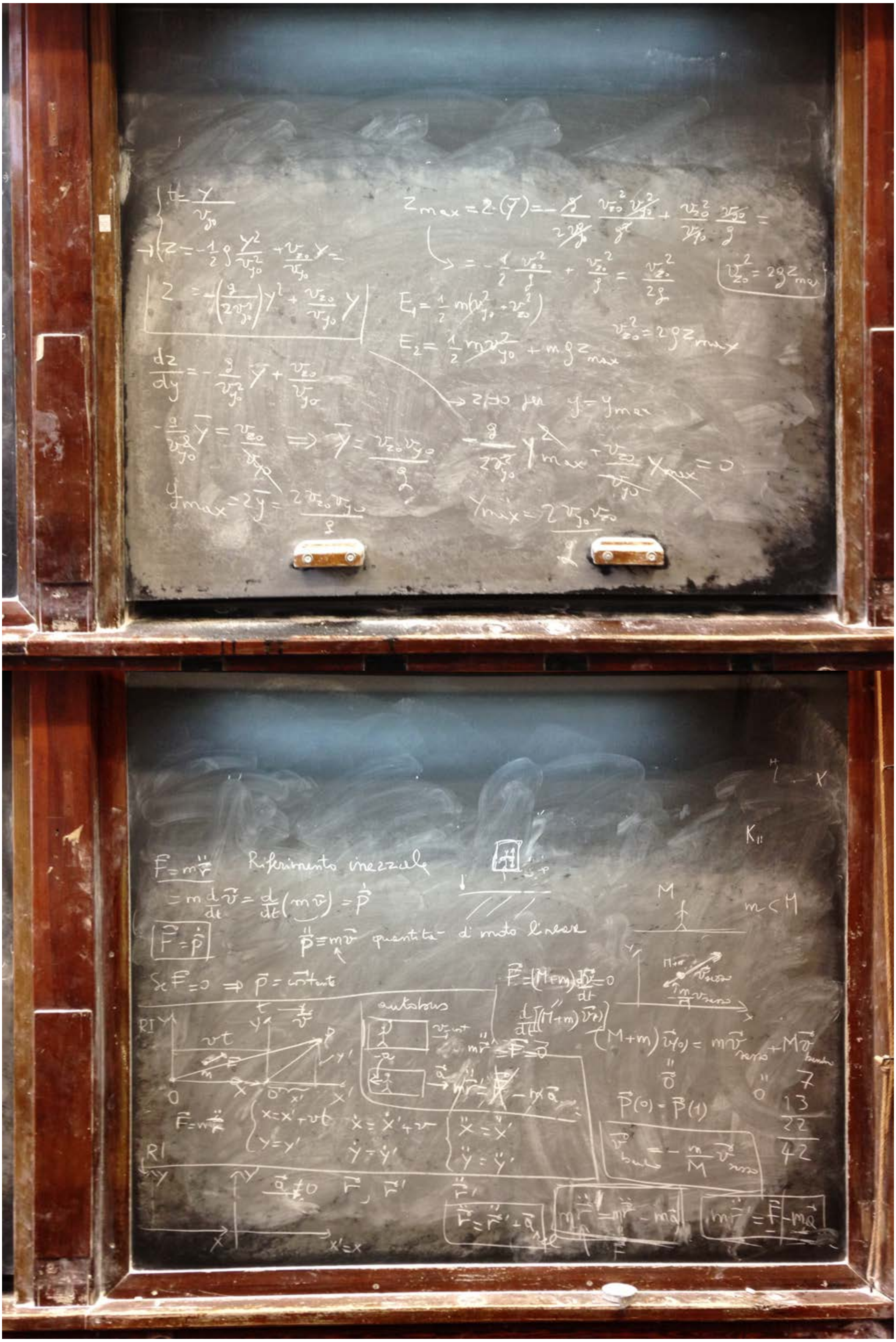
Riferimento accelerato: eq del moto in un riferimento accelerato (Es: ascensore di Einstein in caduta libera); riferimento non inerziale (nel quale compaiono forze inerziali)




Riferimento inerziale
quantità di moto lineare
autobus

**27 Febbraio 2014**
Un riferimento rotante è non inerziale anche se ruota a velocità angolare costante. Facciamo i conti nel piano perpendicolare al vettore velocità angolare di rotazione. Uso l’esempio della giostra, del vettore posizione e del vettore velocità del cavalluccio; dei vettori posizione e velocità del bambino che corre sulla giostra. La formula importante è quella che lega la derivata temporale di un vettore in un riferimento inerziale a quella in un riferimento rotante. Usando questa, arrivo alla formula generale che fornisce l’equazione del moto in un riferimento rotante (non inerziale), con la forma specifica di tutte le forze aggiuntive inerziali (in quanto proporzionali alla massa inerziale) che compaiono in questo sistema di riferimento.

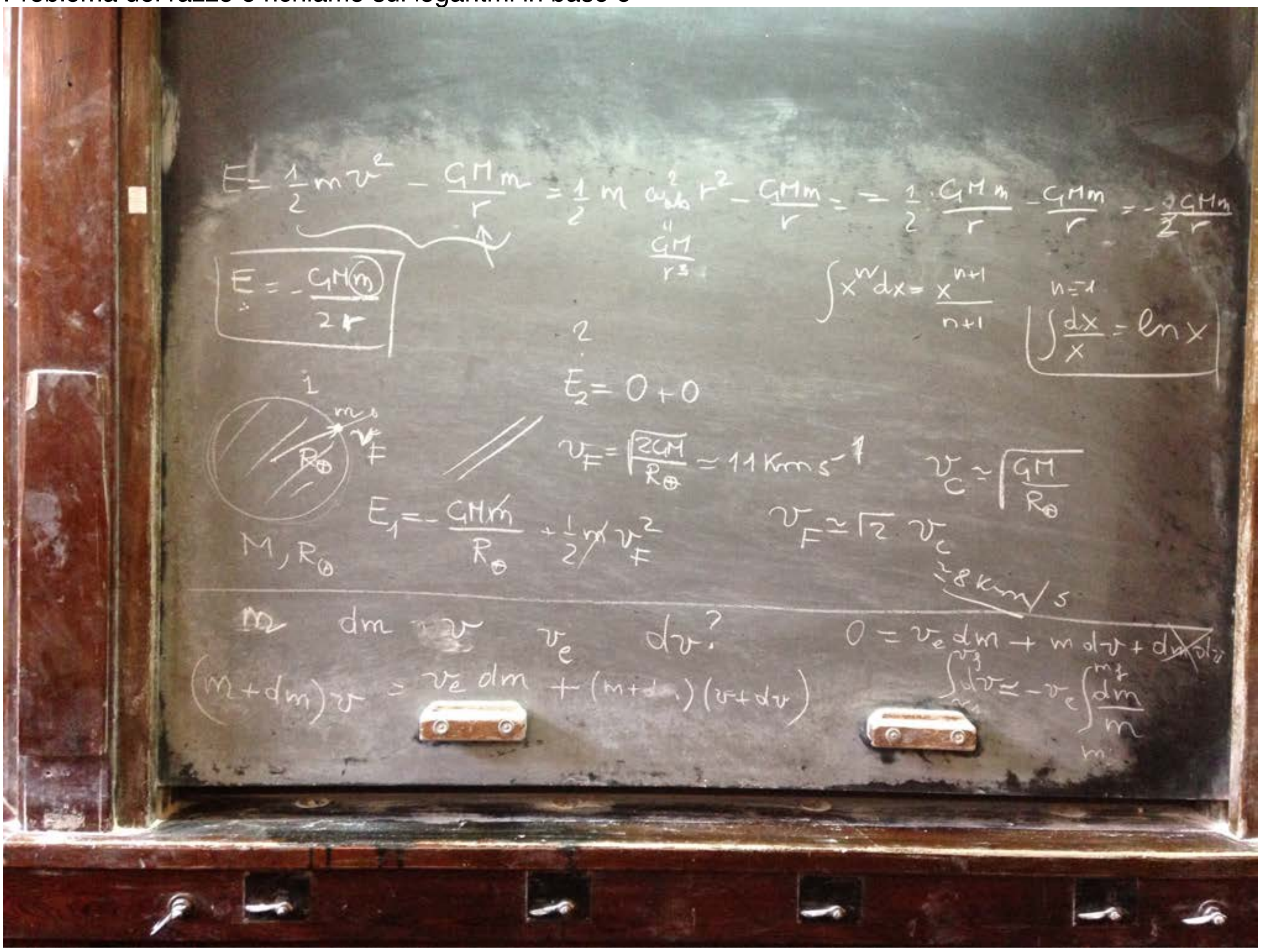


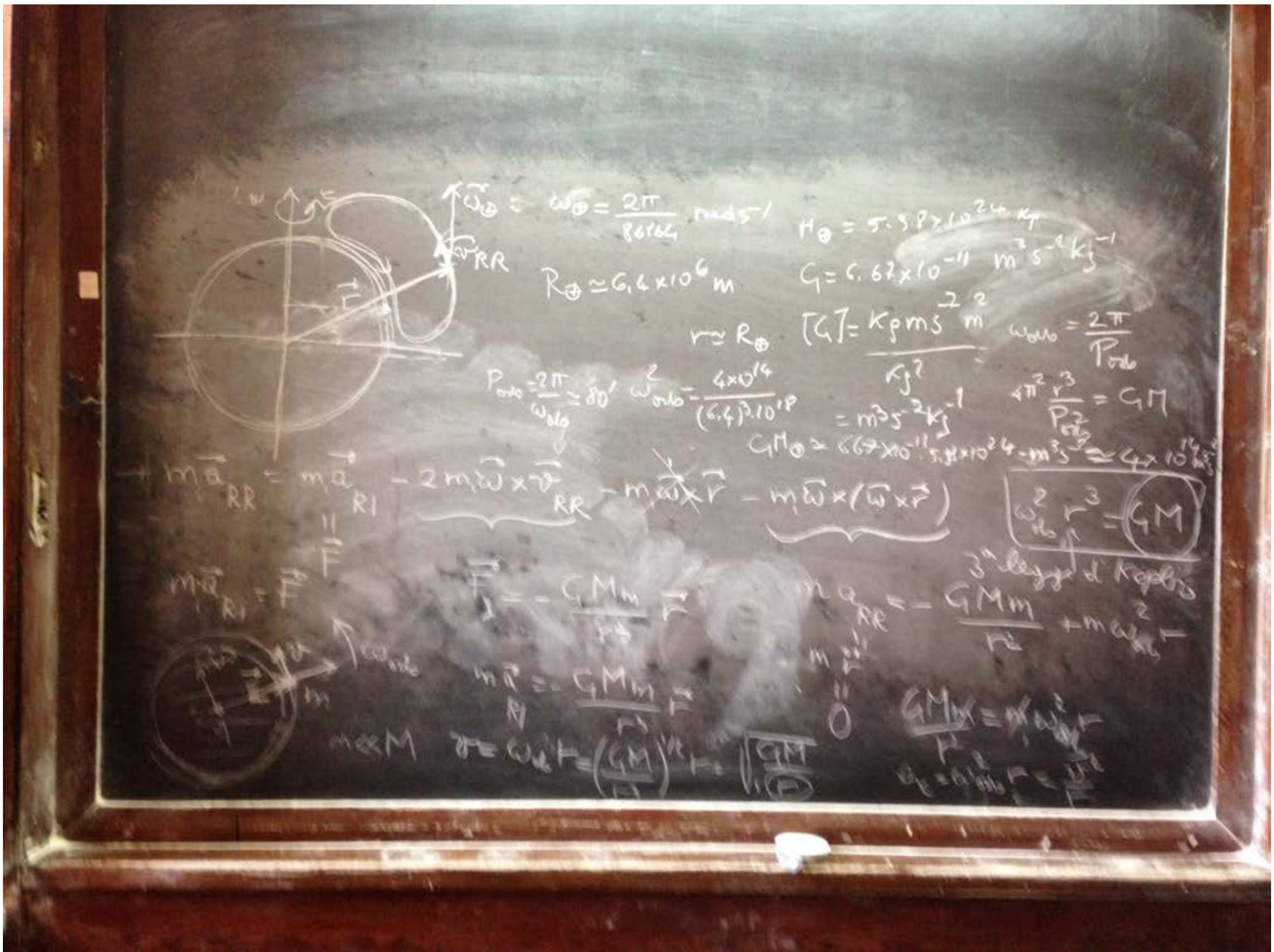
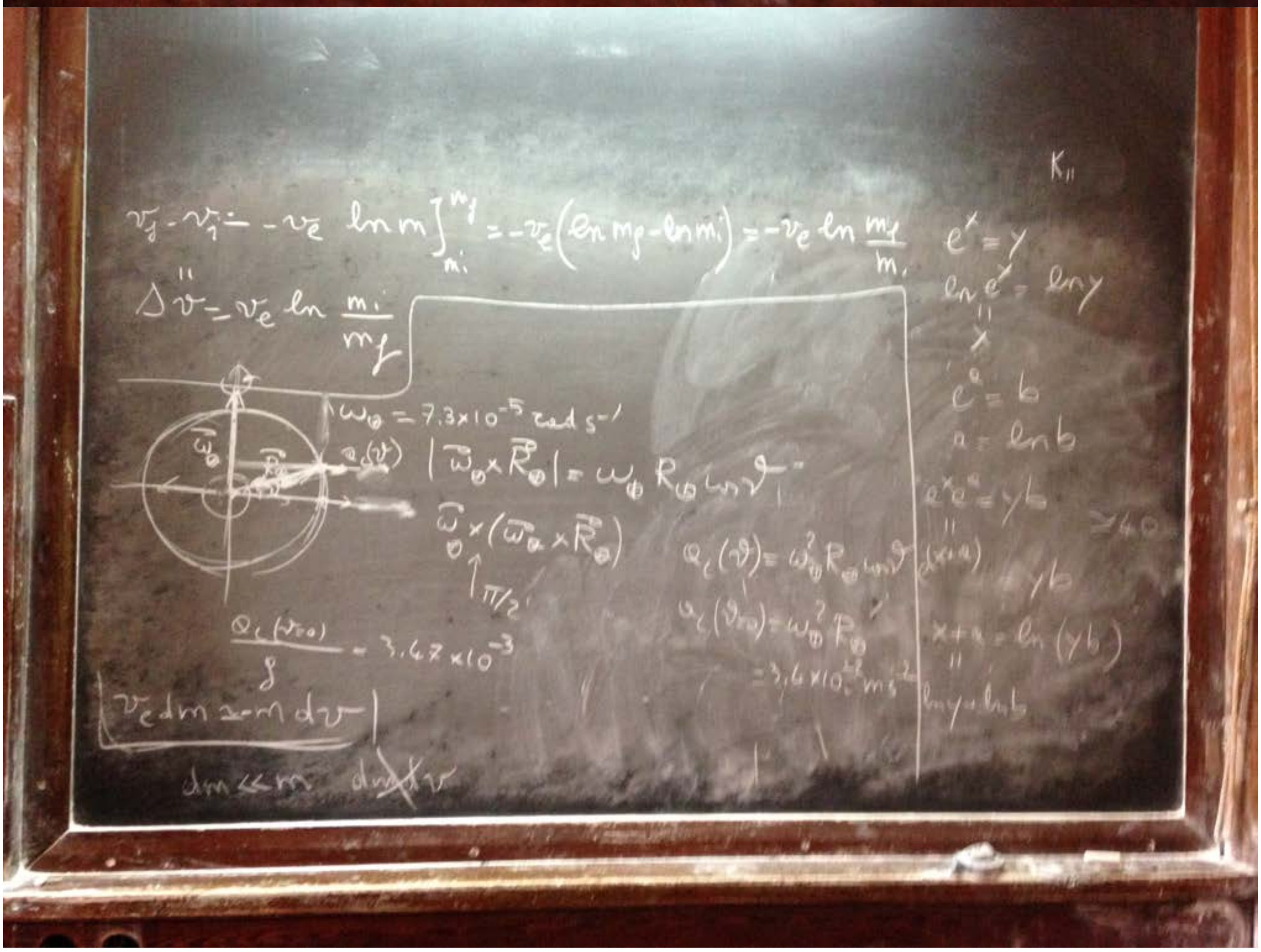


Riferimento inerziale
quantità di moto lineare
autobus

**4 Marzo 2014**
Moto del pendolo in presenza di aria:  forza dissipativa proporzionale alla velocità e soluzione della equazione del pendolo in presenza di questa forza aggiuntiva

**11 Marzo 2014**
Riprendo il caso della forza di Coriolis nel caso dei venti e del loro effetto sugli aerei che volano ad alta quota.
Uso la formula delle equazioni del moto in un riferimento rotante applicandola ad un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Terra. Faccio il caso semplice di un satellite di massa trascurabile rispetto alla Terra, che quindi posso considerare fissa nell'origine. Ne ottengo la terza legge di Keplero. Usando poi la relazione tra velocità lineare e velocità angolare trovo la formula che fornisce la velocità lineare in funzione del raggio dell'orbita.
Scrivo la formula dell'energia totale del satellite (cinetica più potenziale) e calcolo il suo valore (costante del moto), che dipende solo dal raggio dell'orbita
Problema del razzo e richiamo sui logaritmi in base e




$\vec{\omega}_\oplus = \omega_\oplus = \frac{2\pi}{86164}$ rad s$^{-1}$
$M_\oplus = 5.98\times10^{24}$ kg
$R_\oplus \simeq 6.4\times10^{6}$ m
$G = 6.67\times10^{-11}$ m$^3$ s$^{-2}$ kg$^{-1}$
$r \simeq R_\oplus$
$\omega_{orb} = \frac{2\pi}{P_{orb}}$
$\frac{4\pi^2 r^3}{P_{orb}^2} = GM$
$m\vec{a}_{RR} = m\vec{a}_{RI} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{RR} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$
$\omega_{orb}^2 r^3 = GM$
3ª legge di Keplero
$m a_{RR} = -\frac{GMm}{r^2} + m\omega_{orb}^2 r$
$m \ll M$

$v_f - v_i = -v_e \ln m\Big]_{m_i}^{m_f} = -v_e(\ln m_f - \ln m_i) = -v_e \ln\frac{m_f}{m_i}$
$\Delta v = v_e \ln\frac{m_i}{m_f}$
$e^x = y$
$\ln e^x = \ln y$
$\omega_\oplus = 7.3\times10^{-5}$ rad s$^{-1}$
$|\vec{\omega}_\oplus\times\vec{R}_\oplus| = \omega_\oplus R_\oplus \sin\vartheta$
$\vec{\omega}_\oplus\times(\vec{\omega}_\oplus\times\vec{R}_\oplus)$
$a_c(\vartheta) = \omega_\oplus^2 R_\oplus \sin\vartheta$
$\frac{a_c(\vartheta=0)}{g} = 3.47\times10^{-3}$
$v_e\, dm = -m\, dv$
$dm \ll m$

**13 Marzo 2014**

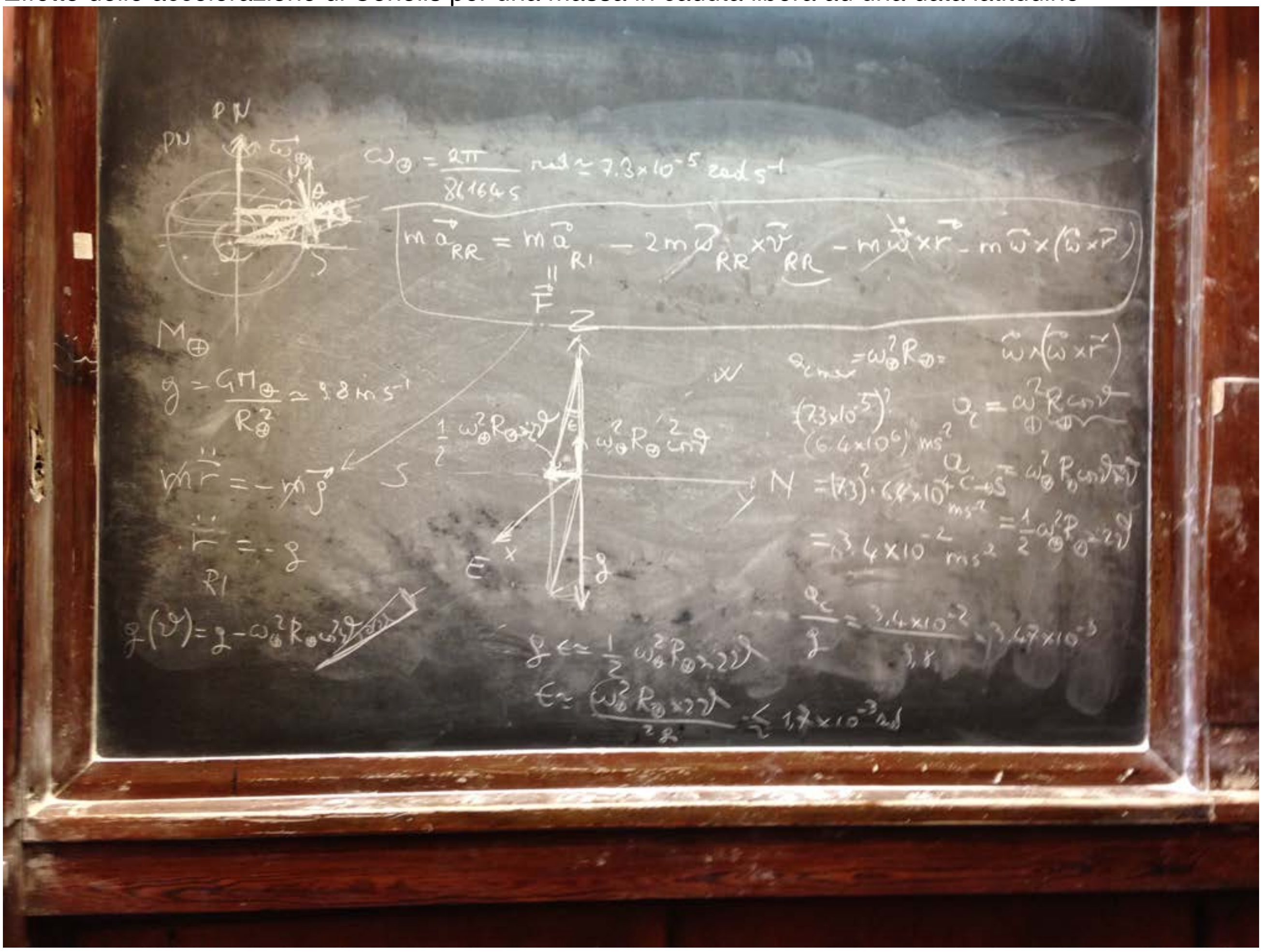
Accelerazione centrifuga sulla Terra in rotazione. Rapporto numerico con l’accelerazione gravitazionale all'equatore

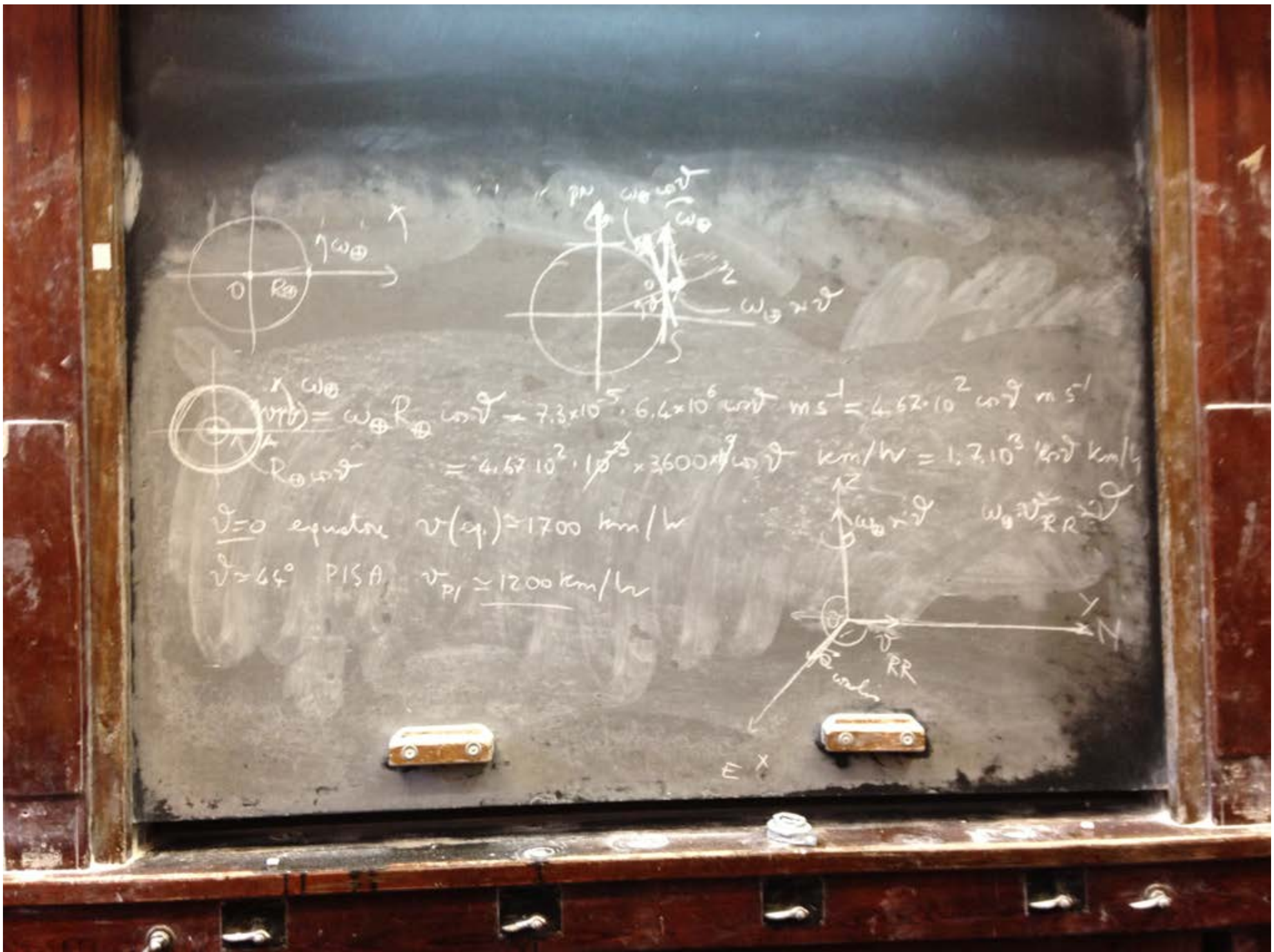
Effetti sulla accelerazione di gravità locale in funzione della latitudine dell’osservatore

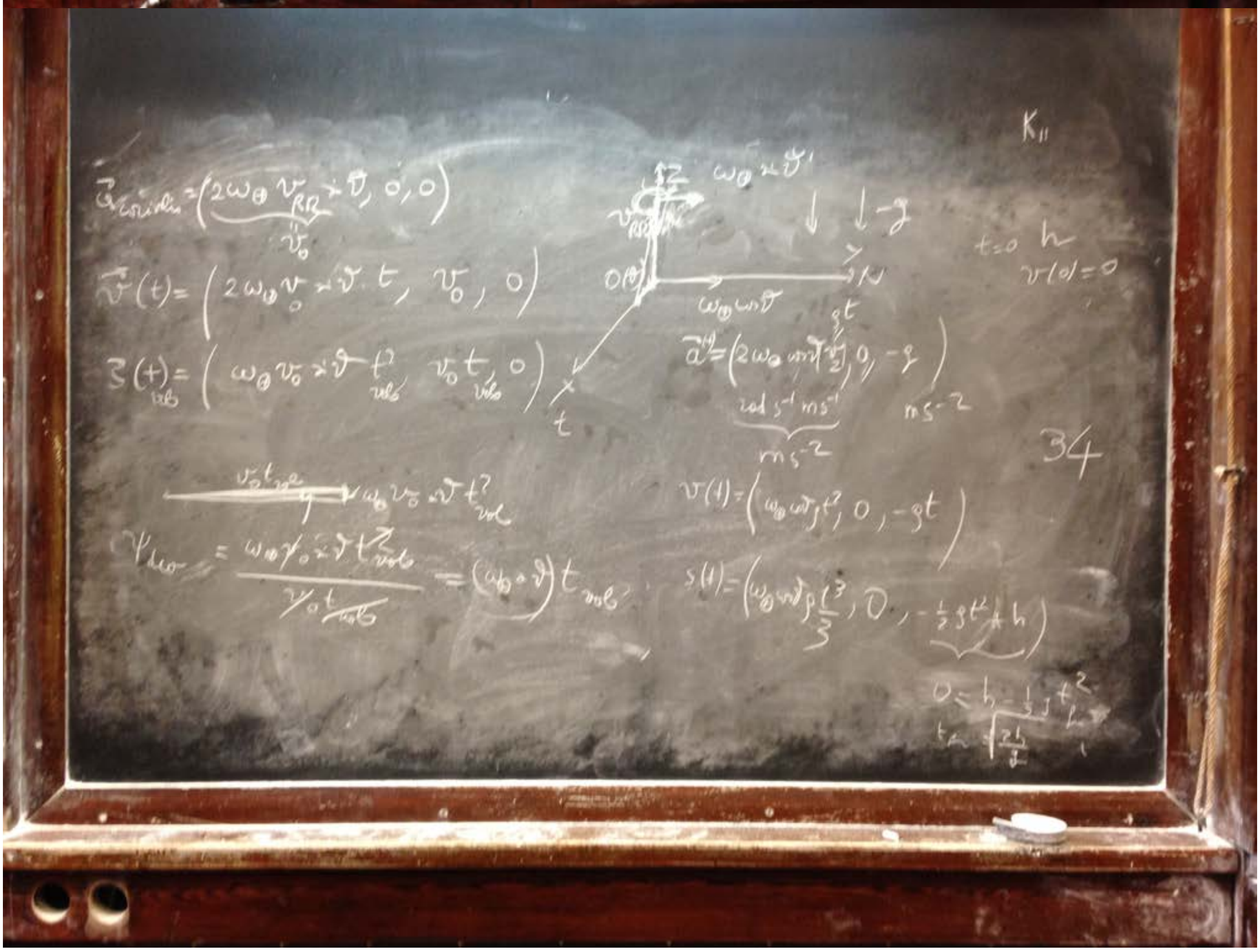
Velocità di rotazione rispetto al sistema inerziale (“stelle fisse”) di un osservatore sulla Terra ad una data latitudine

Moto del proiettile sulla Terra rotante; effetto delle accelerazione di Coriolis sul moto del proiettile e sua deviazione

Effetto delle accelerazione di Coriolis per una massa in caduta libera ad una data latitudine

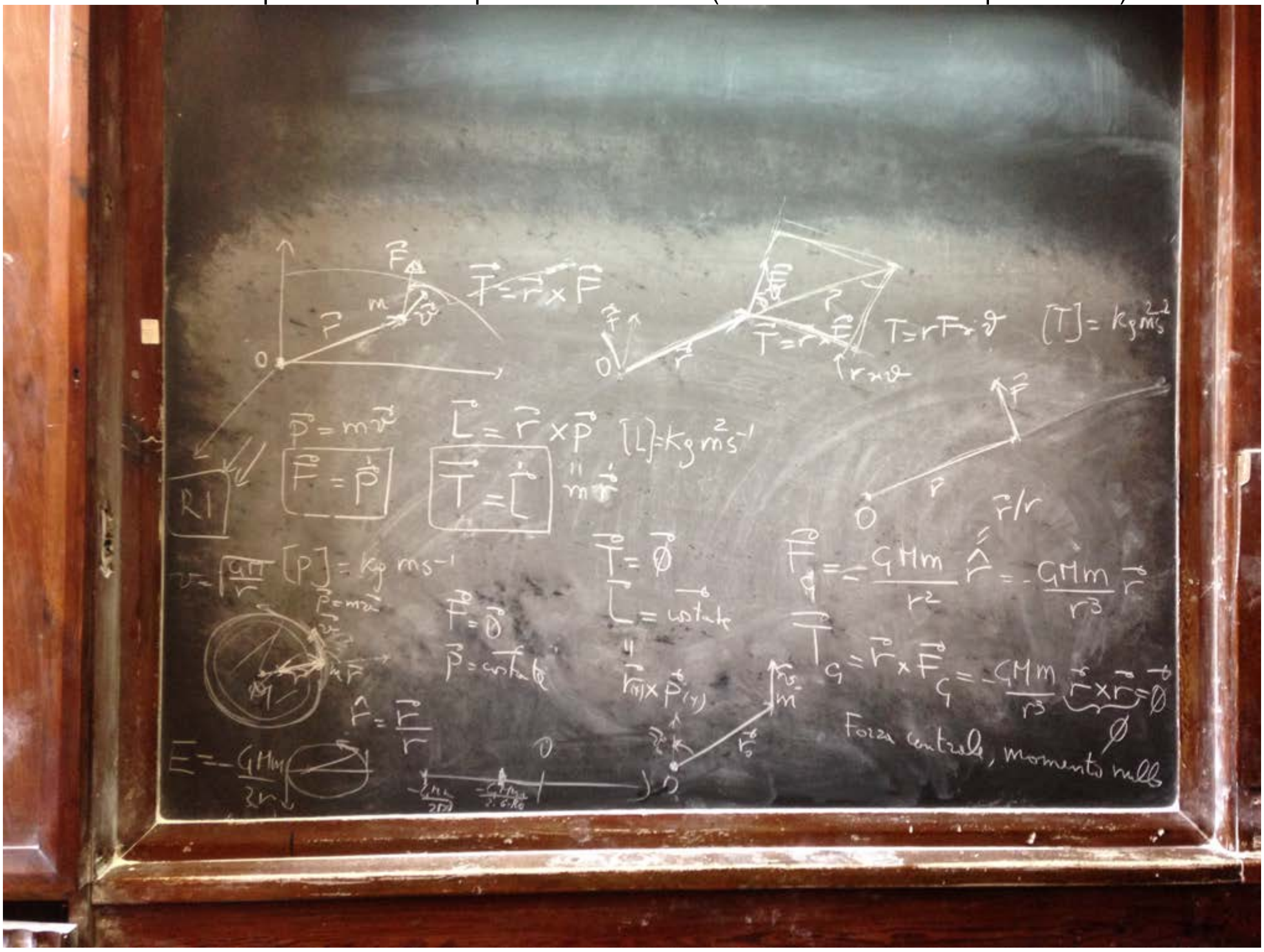


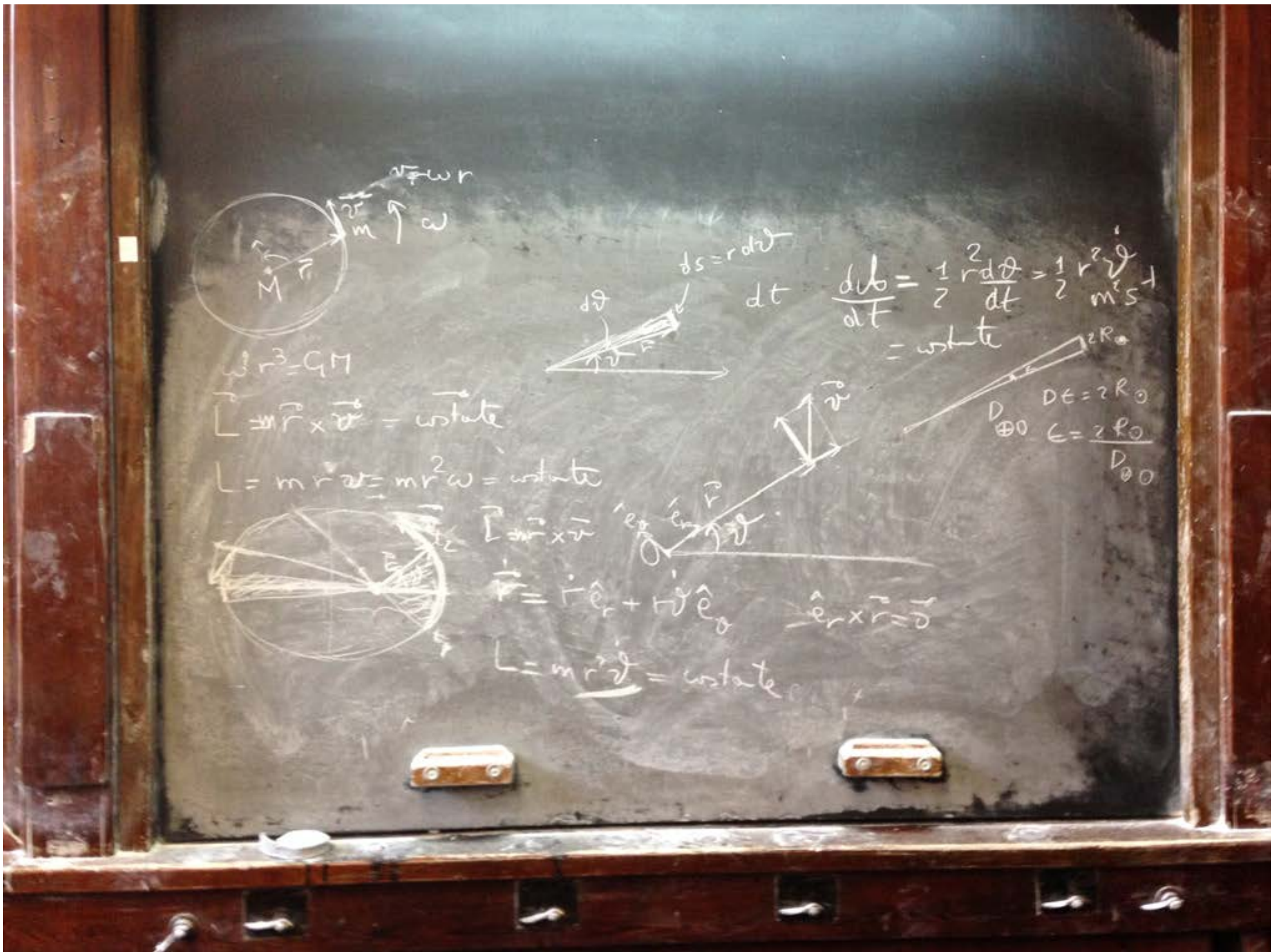

ϑ=0 equatore v(eq.) ≃ 1700 km/h
ϑ≃44° PISA v_Pi ≃ 1200 km/h

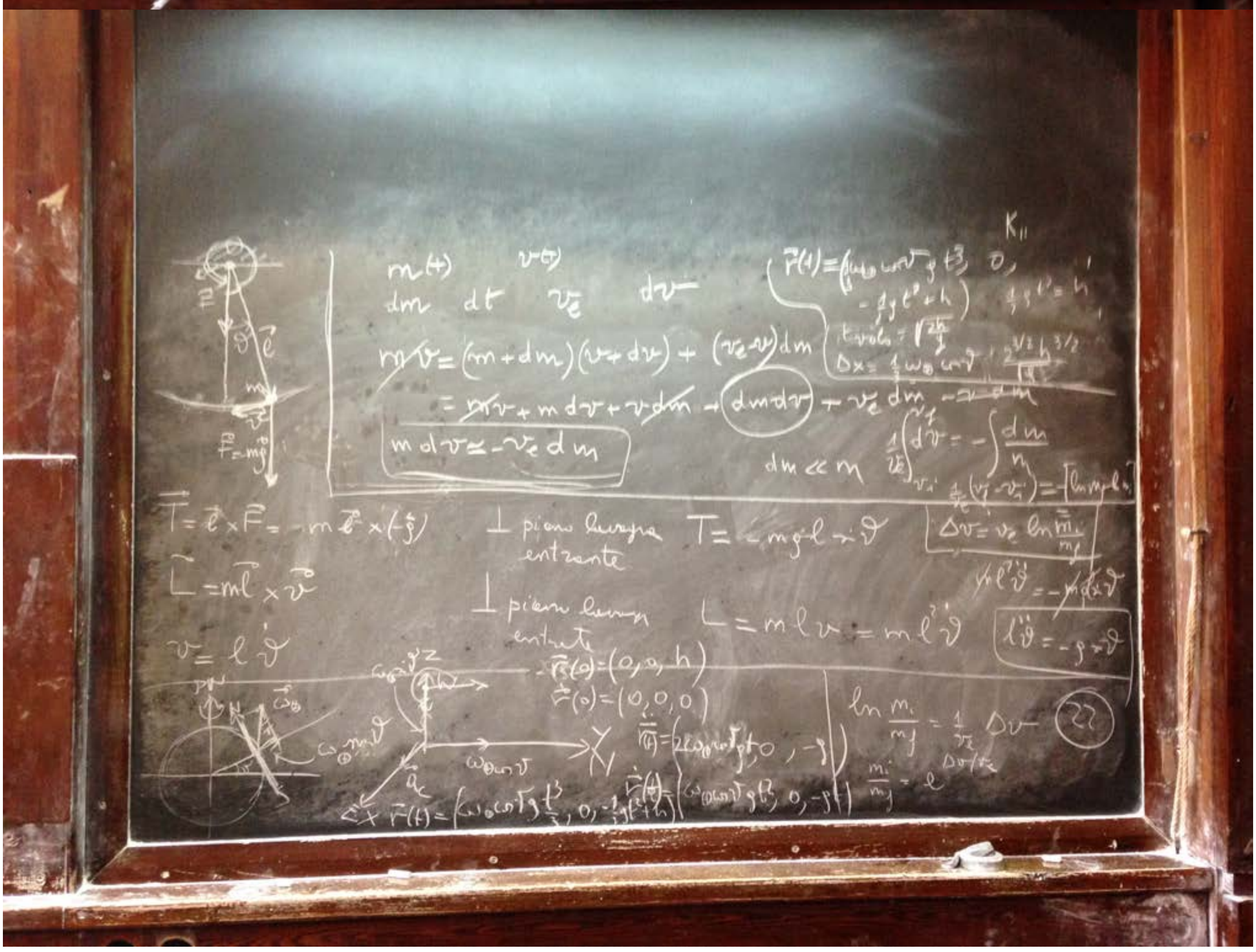

K11
t=0 h
v(0)=0
34

**18 Marzo 2014**

Momento angolare e momento di una forza. Definizioni ed equazione fondamentale di Newton
Il caso delle forze centrali (conservazione del momento angolare)
Orbita di un satellite: conservazione del momento angolare, velocità areolare e seconda legge di Keplero
Problema del pendolo semplice risolto usando momento angolare e momento della forza gravitazionale
Conservazione della quantità di moto e problema del razzo (risistemato dalla volta precedente)





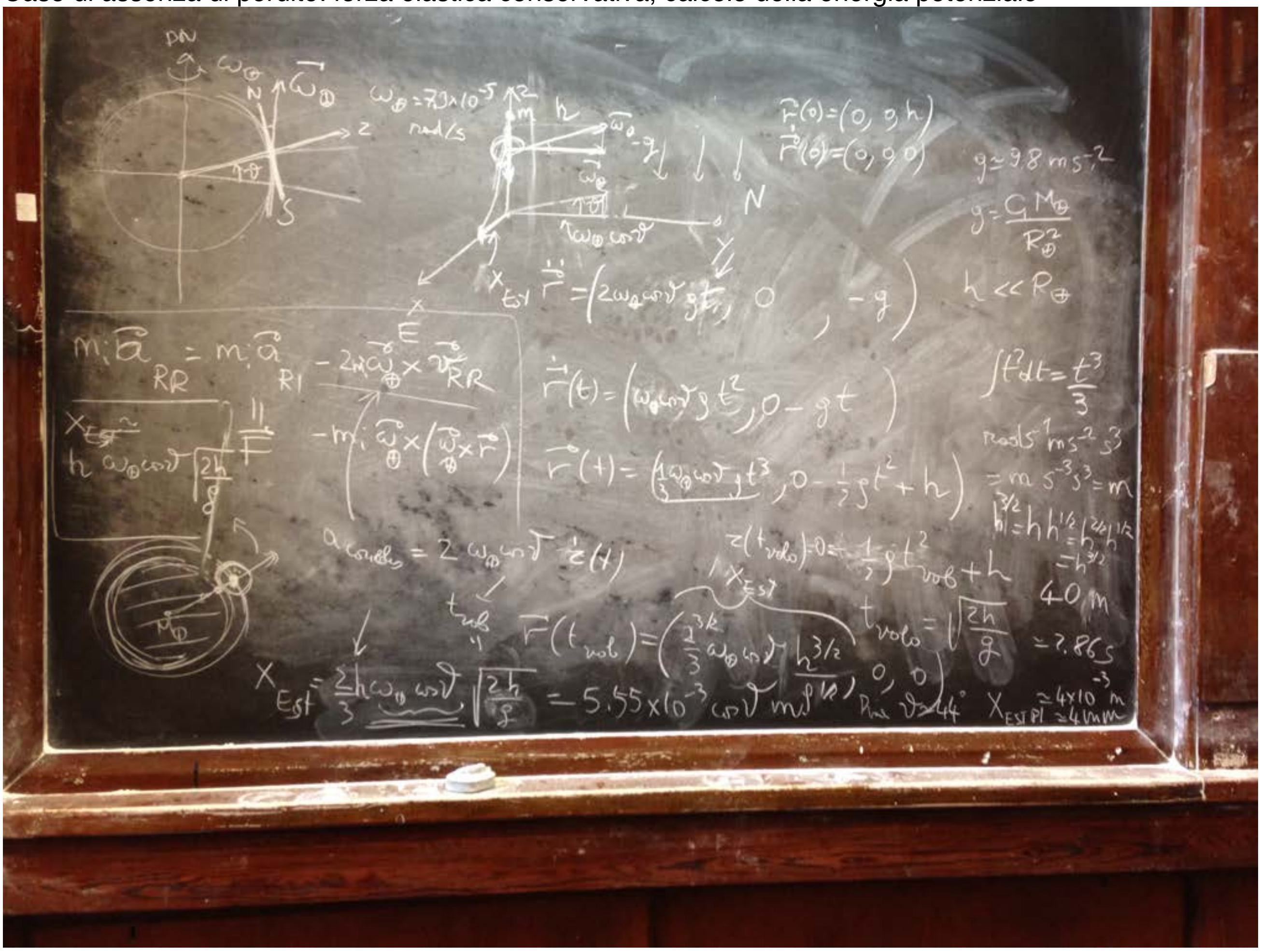


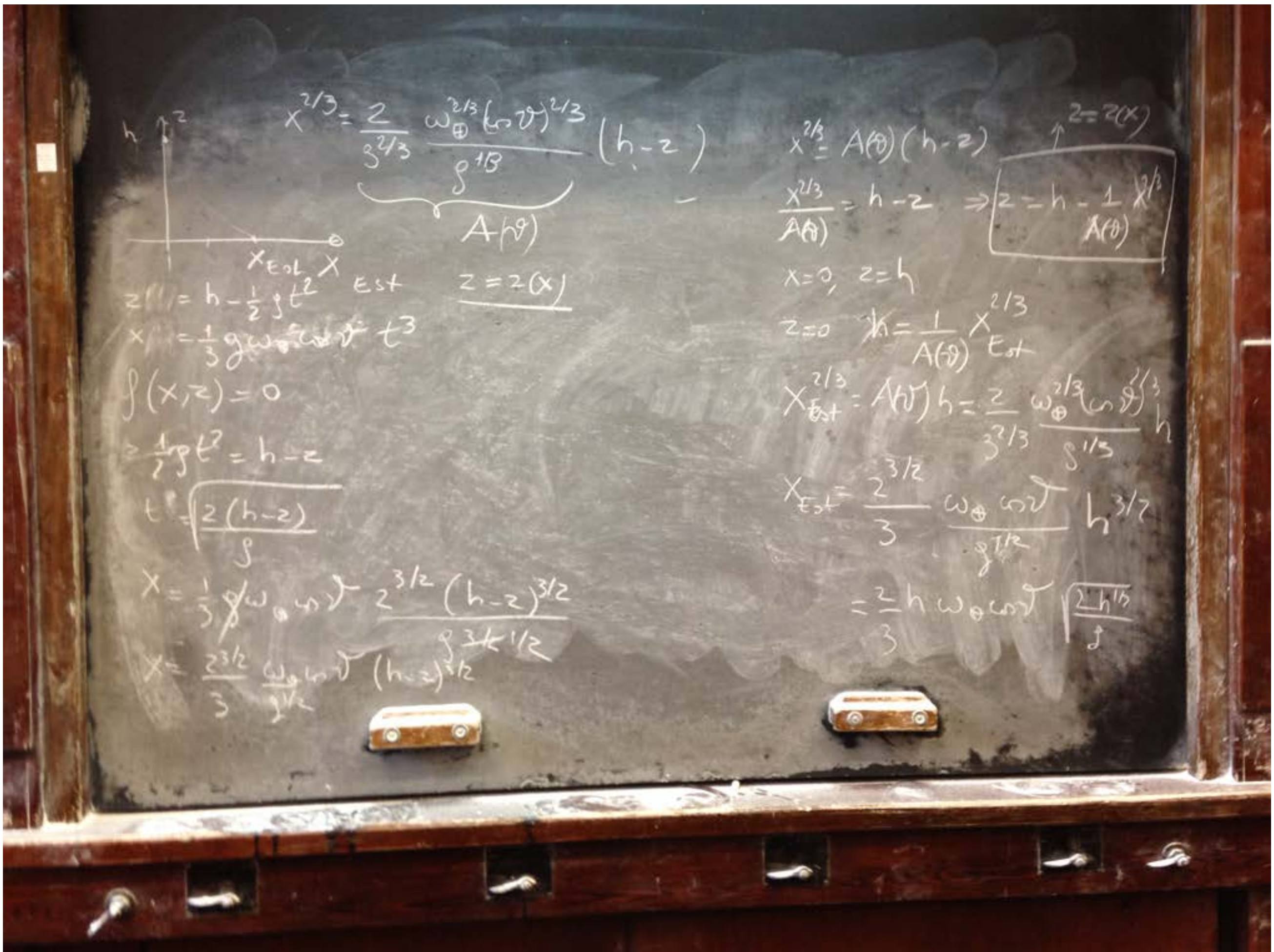
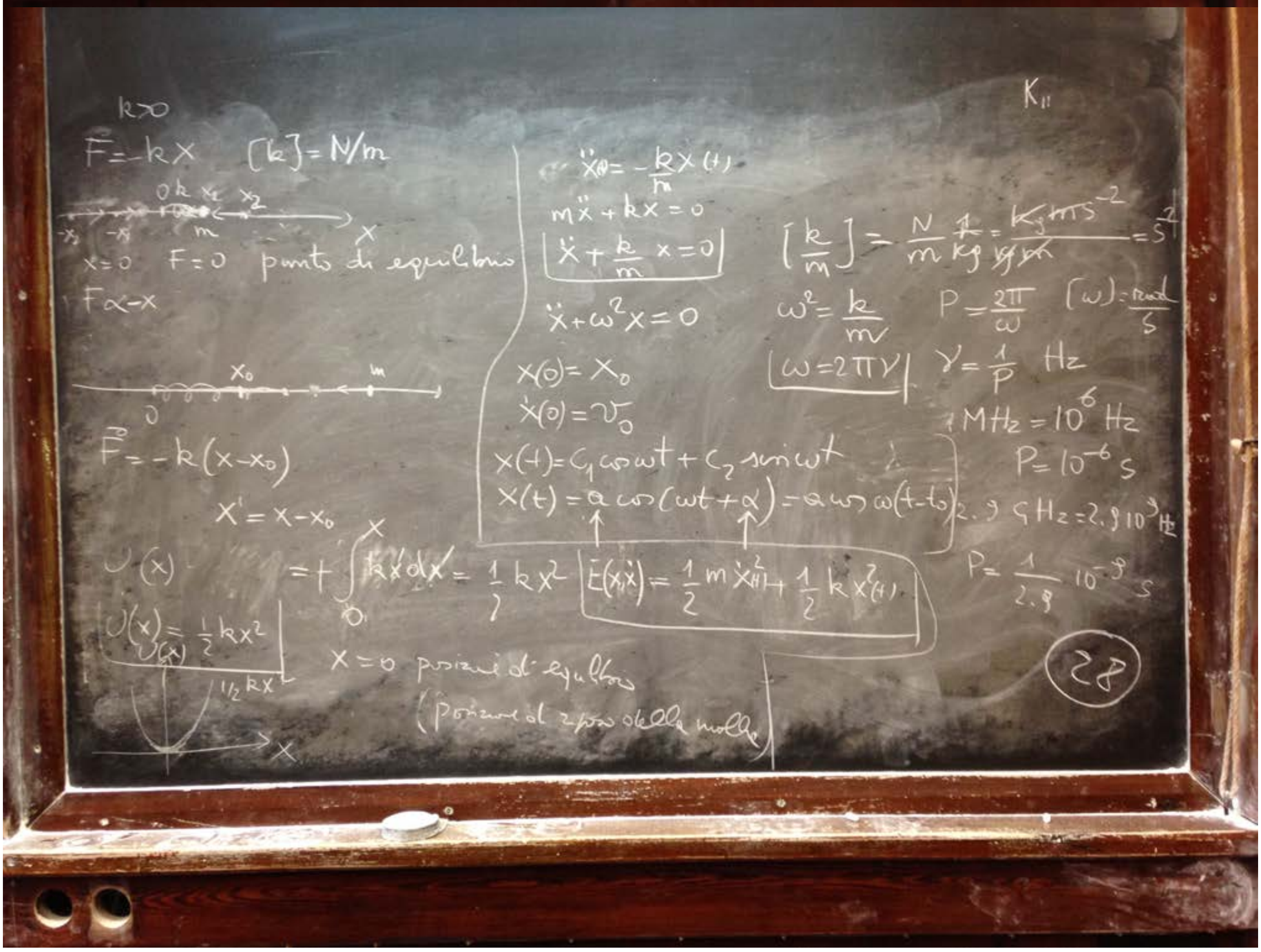
**20 Marzo 2014**

Caduta dei gravi, accelerazione di Coriolis, equazioni del moto. Loro integrazione. Equazione della traiettoria

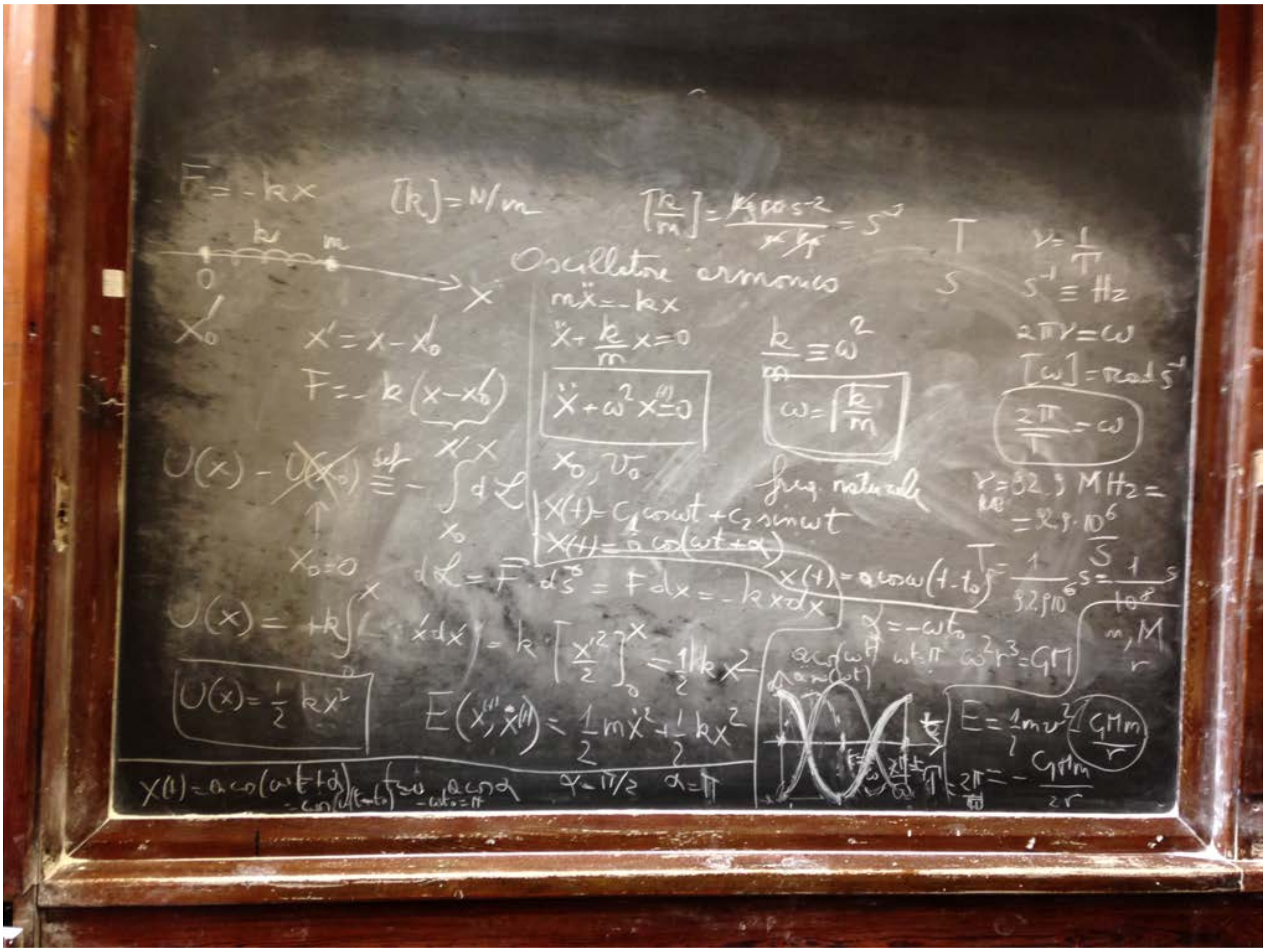
Forza elastica, equazione del moto (oscillatore armonico), frequenza angolare (o pulsazione), forma generale della soluzione.

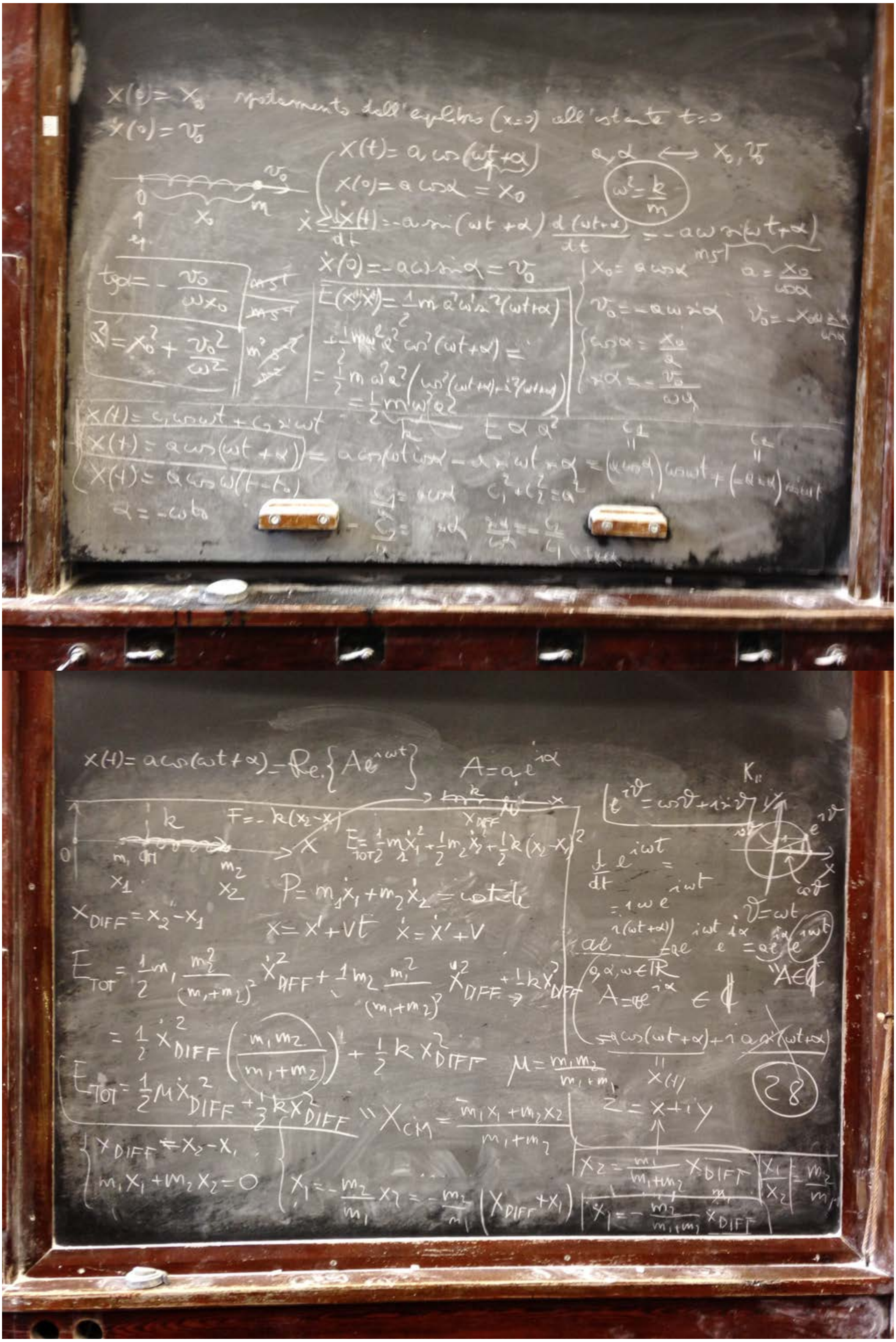
Caso di assenza di perdite: forza elastica conservativa, calcolo della energia potenziale




$x^{2/3} = A(\vartheta)(h-z)$
$z = z(x)$
$X_{Est}$
Est
$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$
$\rho(x,z) = 0$
$\frac{1}{2} g t^2 = h - z$
$t = \sqrt{\frac{2(h-z)}{g}}$
$x = 0, \; z = h$

$k>0$
$\vec{F} = -kx \qquad [k] = N/m$
$x=0 \quad F=0$ punto di equilibrio
$F \propto -x$
$\vec{F} = -k(x-x_0)$
$x' = x - x_0$
$m\ddot{x} + kx = 0$
$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
$x(0) = x_0$
$\dot{x}(0) = v_0$
$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$
$\omega^2 = \frac{k}{m}$
$P = \frac{2\pi}{\omega}$
$\omega = 2\pi\nu$
$\nu = \frac{1}{P}$ Hz
$MHz = 10^6$ Hz
$P = 10^{-6}$ s
$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$
$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$
$x=0$ posizione di equilibrio
28

**25 Marzo 2014**
Caso di due masse accoppiate da una forza elastica in una sola direzione. Moto relativo e riduzione ad un solo corpo (centro di massa, conservazione della quantità di moto e massa ridotta). Energia totale di un oscillatore armonico.



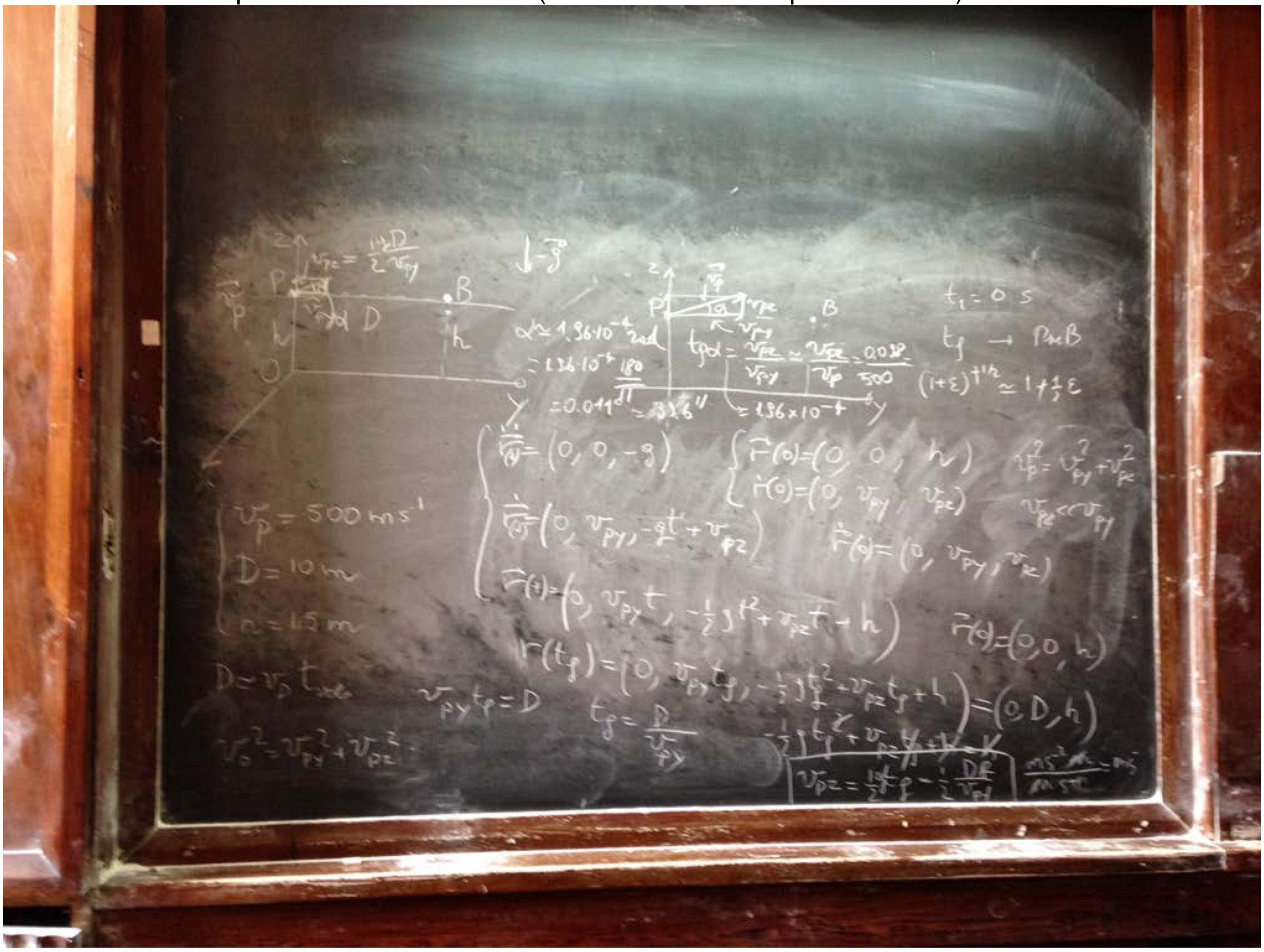


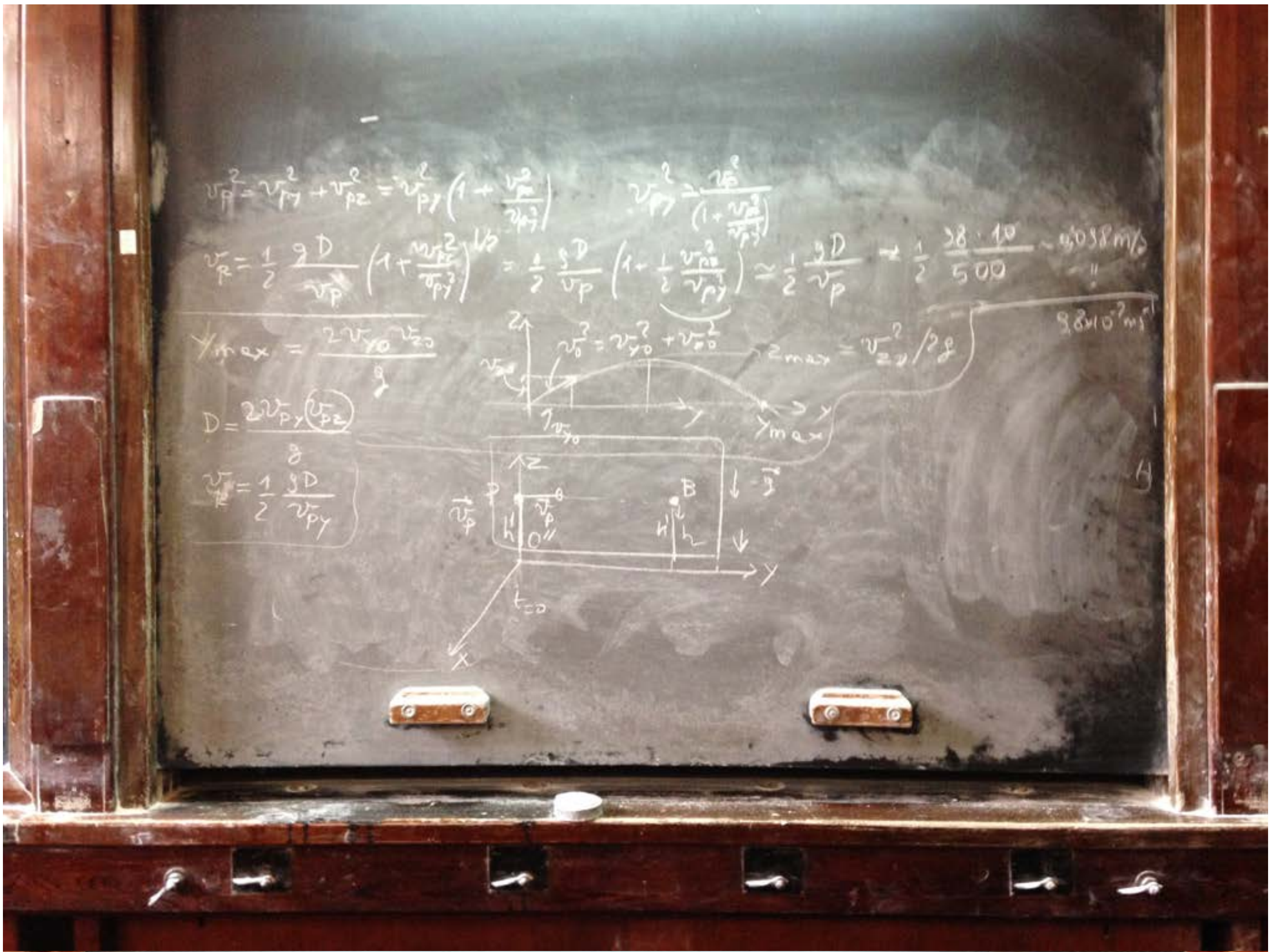
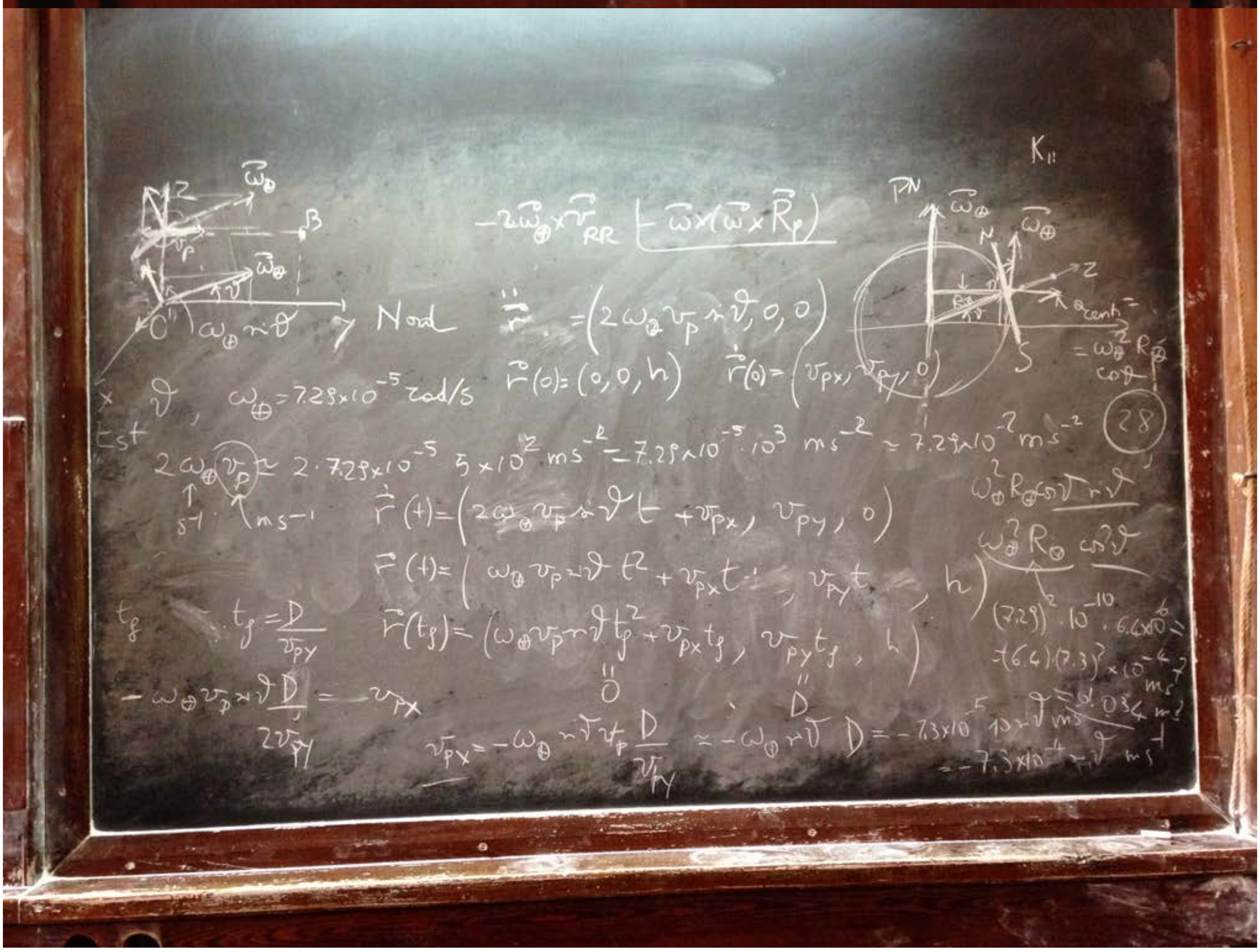
x(0) = x0 spostamento dall'equilibrio (x=0) all'istante t=0
ẋ(0) = v0
x(t) = a cos(ωt+α)
x(0) = a cos α = x0
ω² = k/m
ẋ(0) = −aω sin α = v0
x(t) = a cos(ωt+α) = Re{A e^{iωt}}
A = a e^{iα}
F = −k(x2−x1)
P = m1ẋ1 + m2ẋ2 = costante
x = x' + vt
ẋ = ẋ' + v
XDIFF = x2 − x1
μ = m1m2 / (m1+m2)
XCM = (m1x1 + m2x2) / (m1+m2)
z = x + iy
28

**<u>27 Marzo 2014 (Secondo compitino)</u>**

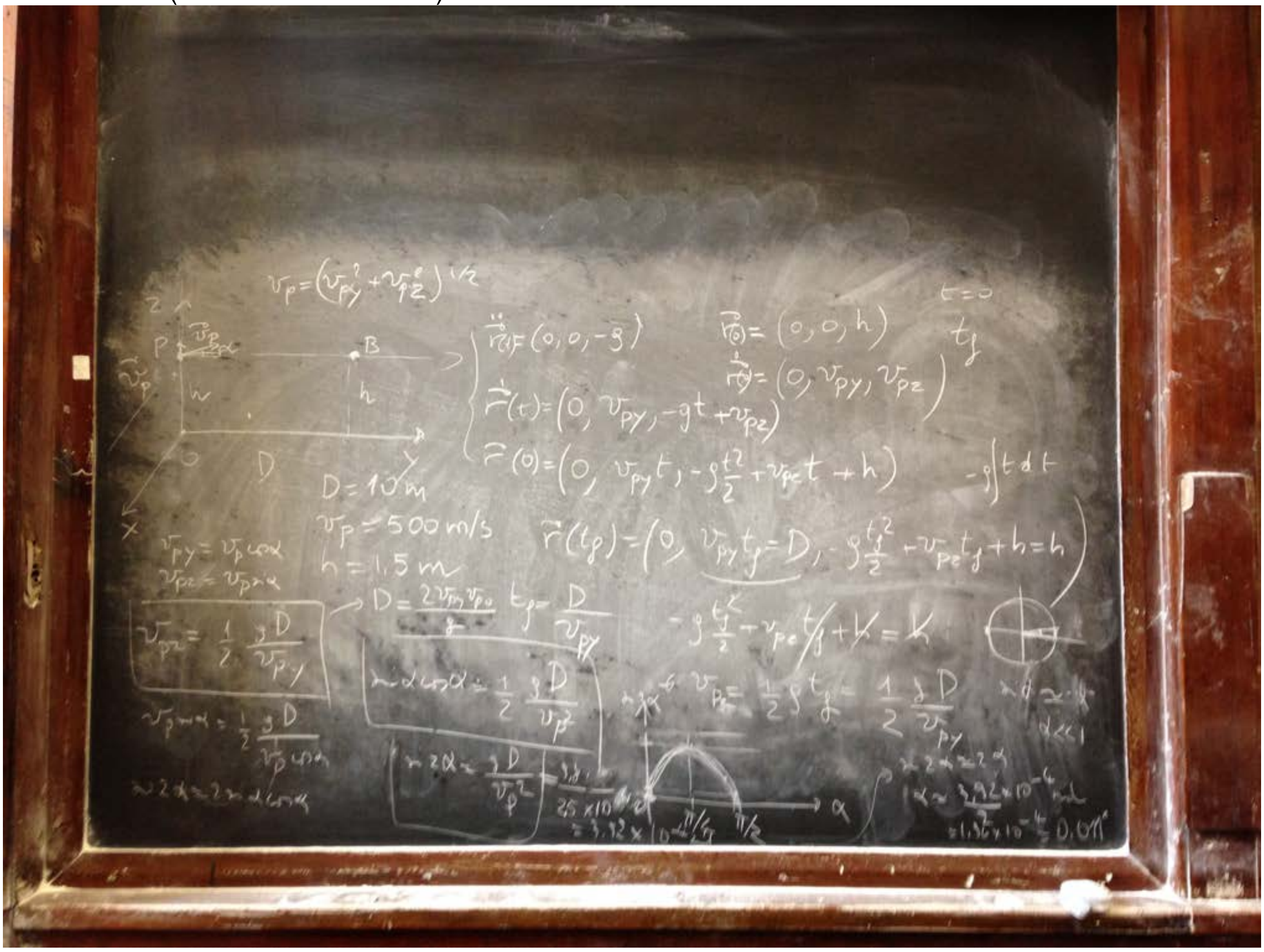
**<u>1 Aprile 2014</u>**

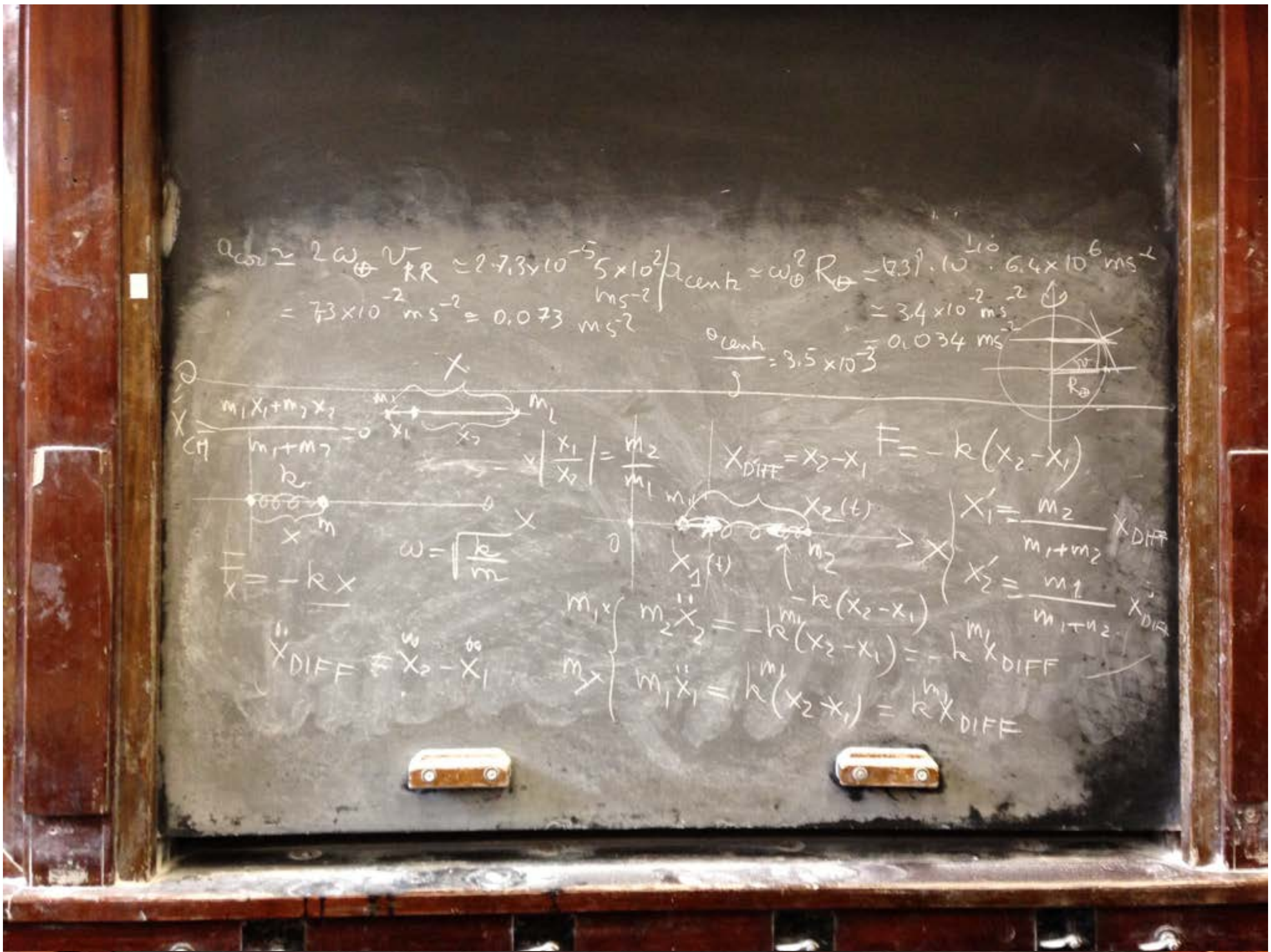
Correzione del compitino del 27 Marzo 2014 (testo e soluzione disponibili in rete)



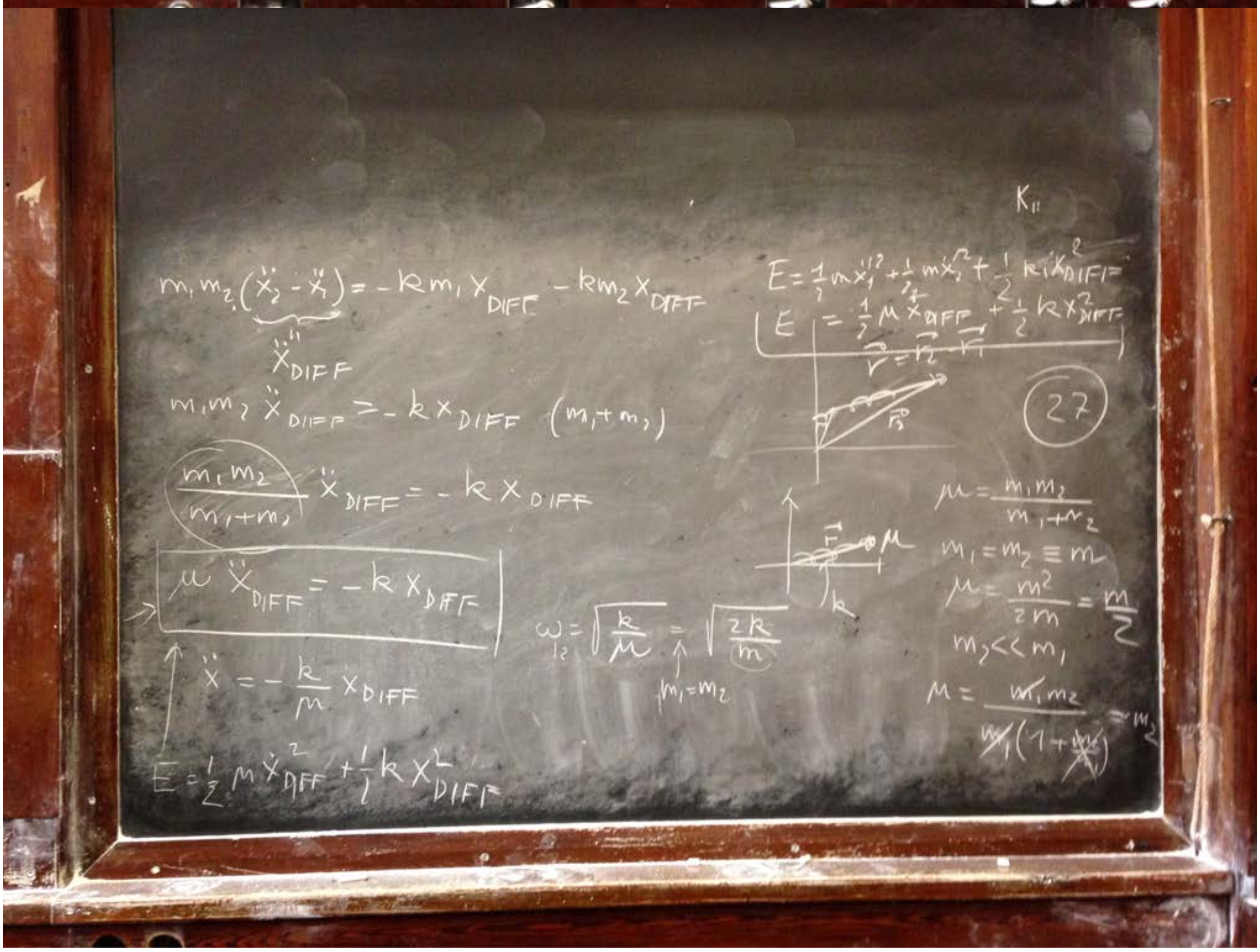

$D = \frac{2 v_{py} v_{pz}}{g}$
$v_p = \frac{1}{2}\frac{gD}{v_{py}}$
$z_{max} = v_{z0}^2/2g$
$9.8 \times 10^{-2}\,\mathrm{ms}^{-1}$

$K_{II}$
Nord
$\omega_\oplus = 7.29 \times 10^{-5}$ rad/s
$\vec{r}(0) = (0, 0, h)$
$t_g = \frac{D}{v_{py}}$

**3 Aprile 2014**
Continua soluzione del compitino del 27 marzo. Continua problema delle 2 masse accoppiate da una forza elastica (caso unidimensionale)





= 7.3×10^-2 ms^-2 = 0.073 ms^-2
≃ 3.4×10^-2 ms^-2
= 0.034 ms^-2
= 3.5×10^-3
X_DIFF = X_2 − X_1
F = −k(x_2 − x_1)
ω = √(k/m)
F_x = −kx
X_1' = m_2/(m_1+m_2) X_DIFF
X_2' = m_1/(m_1+m_2) X_DIFF
Ẍ_DIFF = Ẍ_2 − Ẍ_1
m_2 Ẍ_2 = −k(x_2 − x_1) = −k X_DIFF
m_1 Ẍ_1 = k(x_2 − x_1) = k X_DIFF



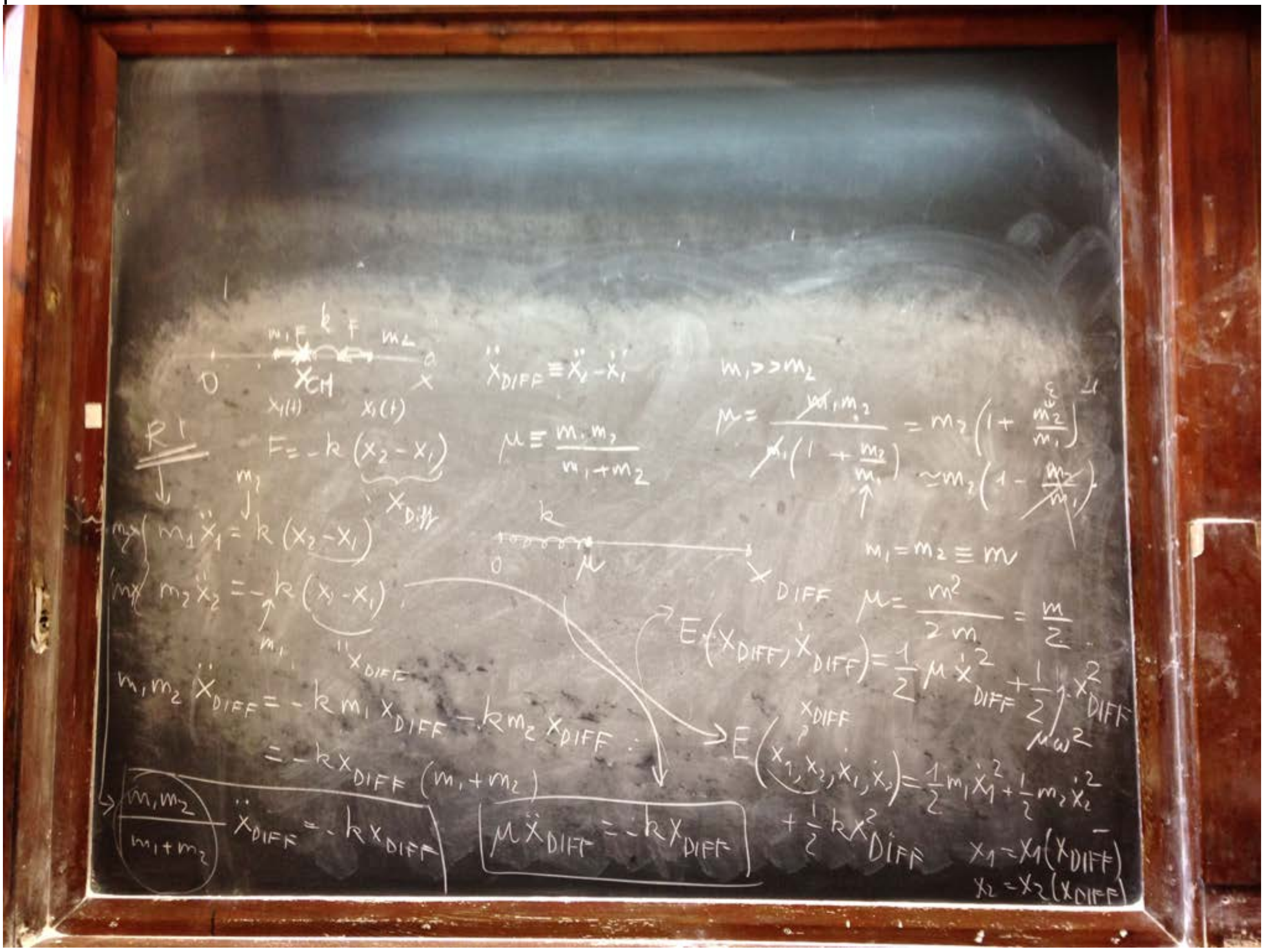
m_1 m_2 (Ẍ_2 − Ẍ_1) = −k m_1 X_DIFF − k m_2 X_DIFF
Ẍ_DIFF
m_1 m_2 Ẍ_DIFF = −k X_DIFF (m_1 + m_2)
m_1 m_2 / (m_1 + m_2) Ẍ_DIFF = −k X_DIFF
μ Ẍ_DIFF = −k X_DIFF
Ẍ = −k/μ X_DIFF
E = ½ μ Ẋ²_DIFF + ½ k X²_DIFF
ω = √(k/μ) = √(2k/m)
m_1 = m_2
E = ½ μ Ẋ²_DIFF + ½ k X²_DIFF
27
μ = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)
m_1 = m_2 ≡ m
μ = m²/2m = m/2
m_2 << m_1

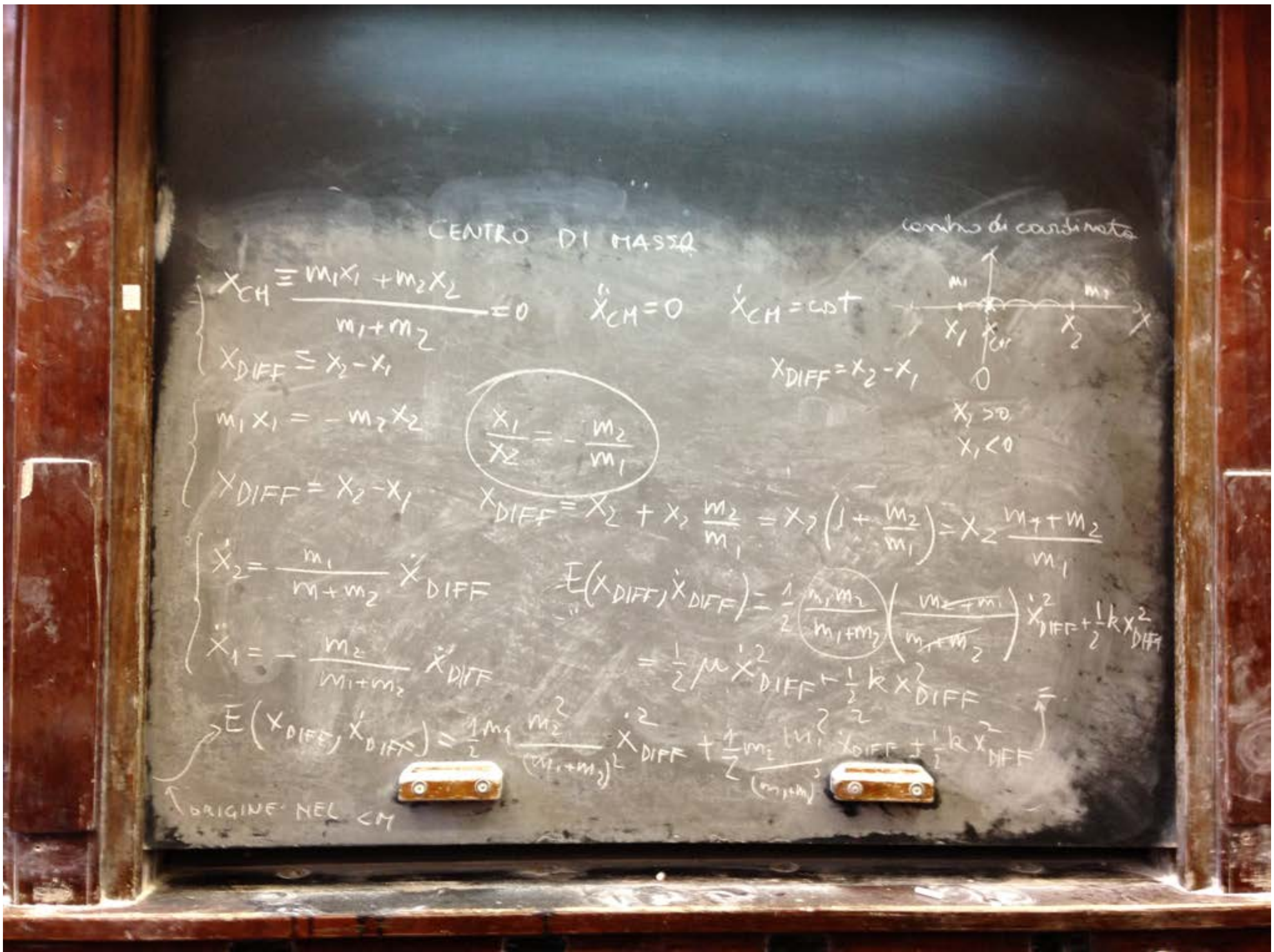
**10 Aprile 2014**

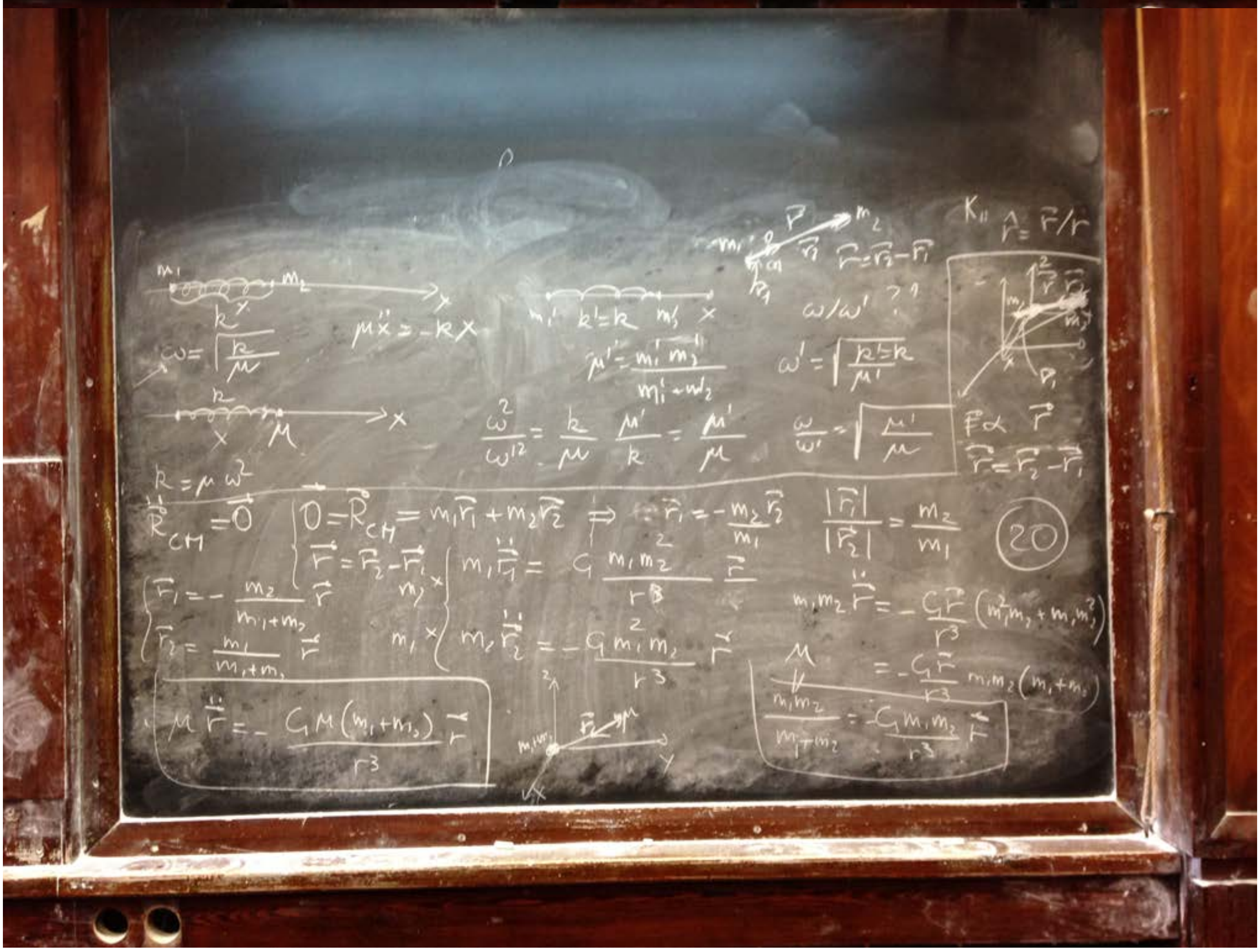
Derivazione della massa ridotta in modo analogo nel caso di 2 masse accoppiate da una forza elastica e nel caso del problema dei 2 copri gravitazionale.

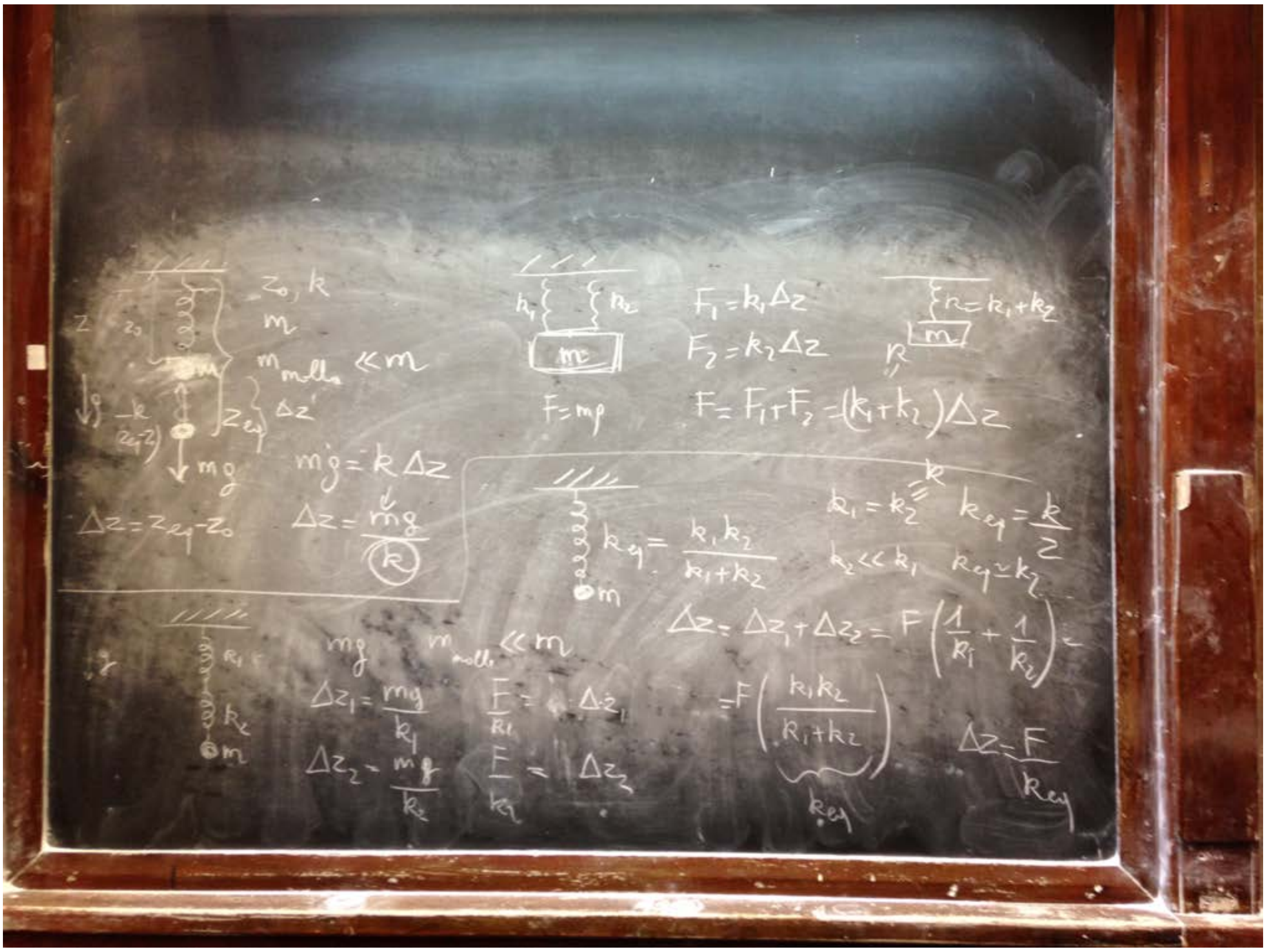
Problema della molecola biatomica formata da isotopi degli stessi atomi.

Concetto di dinamometro e calcolo della costante elastica  equivalente per molle in serie e molle in parallelo.



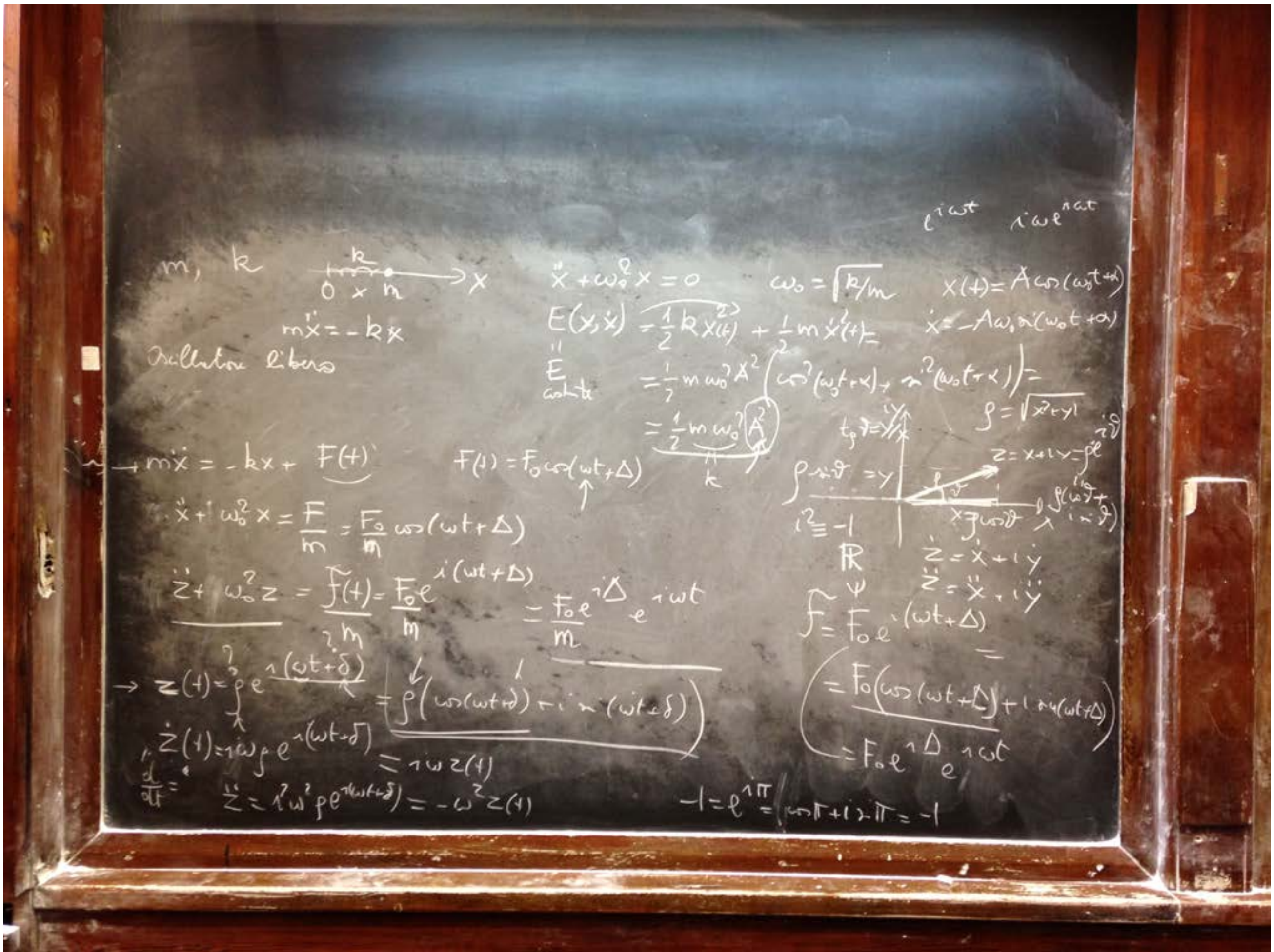
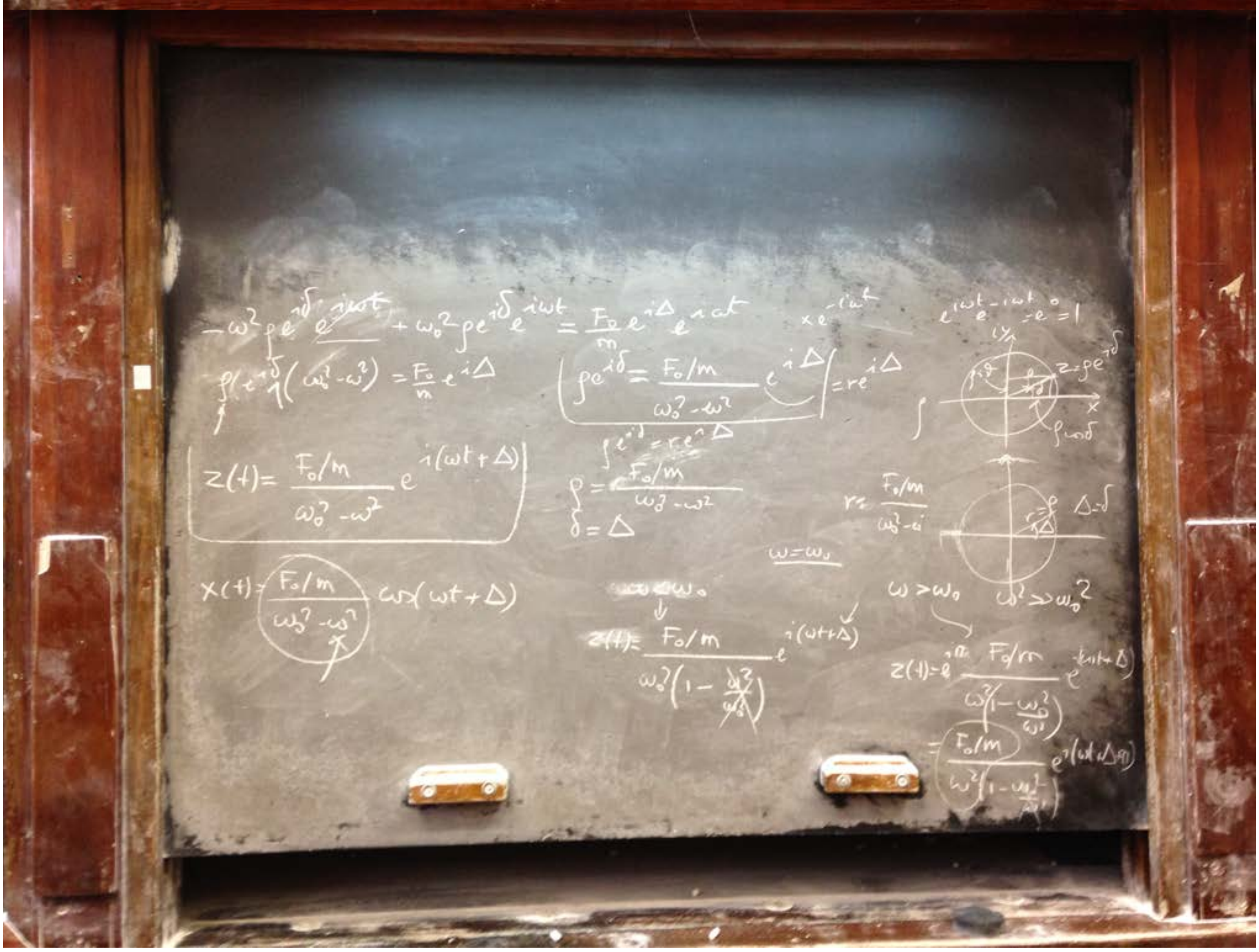

CENTRO DI MASSA
centro di coordinate
ORIGINE NEL CM


20




**<u>6 Maggio 2014</u>**

Oscillatore armonico forzato: soluzione mediante l’uso di esponenziali complessi con particolare attenzione alla rappresentazione grafica dei numeri complessi.
Risposta dell’oscillatore, in ampiezza e fase, in funzione della frequenza forzante
Concetto di risonanza (caso ideale)


m, k
mẍ = -kx
Oscillatore libero
ẍ + ω0² x = 0
ω0 = √(k/m)
x(t) = A cos(ω0t + α)
E(x, ẋ) = ½ k x²(t) + ½ m ẋ²(t)
mẍ = -kx + F(t)
F(t) = F0 cos(ωt + Δ)
ẍ + ω0² x = F/m = F0/m cos(ωt + Δ)
i² = -1
z = x + iy
-1 = e^iπ

z(t) = F0/m / (ω0² - ω²) e^i(ωt+Δ)
x(t) = F0/m / (ω0² - ω²) cos(ωt + Δ)
δ = Δ
ω = ω0
ω > ω0

Osc. forzato smorzato

$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$  $[\gamma\dot{x}] = m s^{-2}$  $\gamma = \frac{m s^{-2}}{m s^{-1}} = s^{-1}$

$K_{//}$  $\nu = \frac{1}{T}$  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i(\omega t + \Delta)}$  $z(t) = \rho e^{i(\omega t + \delta)} = \rho e^{i\delta} e^{i\omega t}$

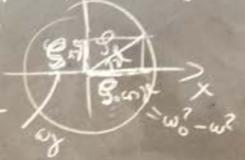
$-\omega^2 \rho e^{i\delta} \cancel{e^{i\omega t}} + i\omega\gamma\rho e^{i\delta}\cancel{e^{i\omega t}} + \omega_0^2 \rho e^{i\delta}\cancel{e^{i\omega t}} = \frac{F_0}{m} e^{i\Delta}\cancel{e^{i\omega t}}$  $\times e^{-i\omega t}$

$e^{i\Delta} = \cos\Delta + i\sin\Delta$

$\rho e^{i\delta}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma\right) = \frac{F_0}{m} e^{i\Delta}$

$\rho e^{i\delta} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} e^{i\Delta}$  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 e^{i\vartheta}$  $\mathbb{R}$

$(\omega_0^2 - \omega^2) + i(\omega\gamma) = \mathcal{G}_0 e^{i\vartheta}$




$\mathcal{G}_0 = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$

$= \frac{F_0/m}{\mathcal{G}_0 e^{i\vartheta}} e^{i\Delta} = \frac{F_0/m}{\mathcal{G}_0} e^{-i\vartheta} e^{i\Delta} =$

$= \left(\frac{F_0/m}{\mathcal{G}_0}\right) e^{i(\Delta - \vartheta)} =$  $\in \mathbb{R}$

$\tan\vartheta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$\tan(-\vartheta) = -\tan\vartheta$

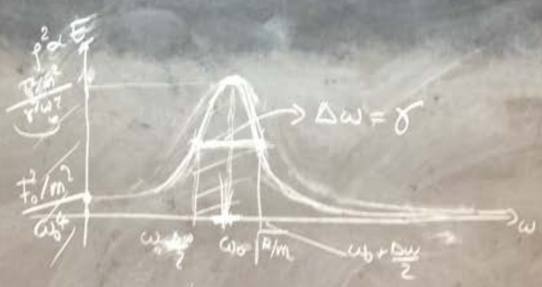
$\rho e^{i\delta} = \boxed{\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}} e^{i(\Delta - \vartheta)}$  $\delta = \Delta - \vartheta$

$$\boxed{\rho^2 = \frac{F_0^2/m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

$\rho^2 = \frac{F_0^2/m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$

$\omega = \omega_0$  $\rho^2(\omega = \omega_0) = \frac{F_0^2/m^2}{\gamma^2\omega^2}$

$\rho^2(\omega = 0) = \frac{F_0^2/m^2}{\omega_0^4}$




e $\omega \approx \omega_0$

Caso $\gamma$ molto piccolo; $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ domina rispetto a $\gamma^2\omega^2$

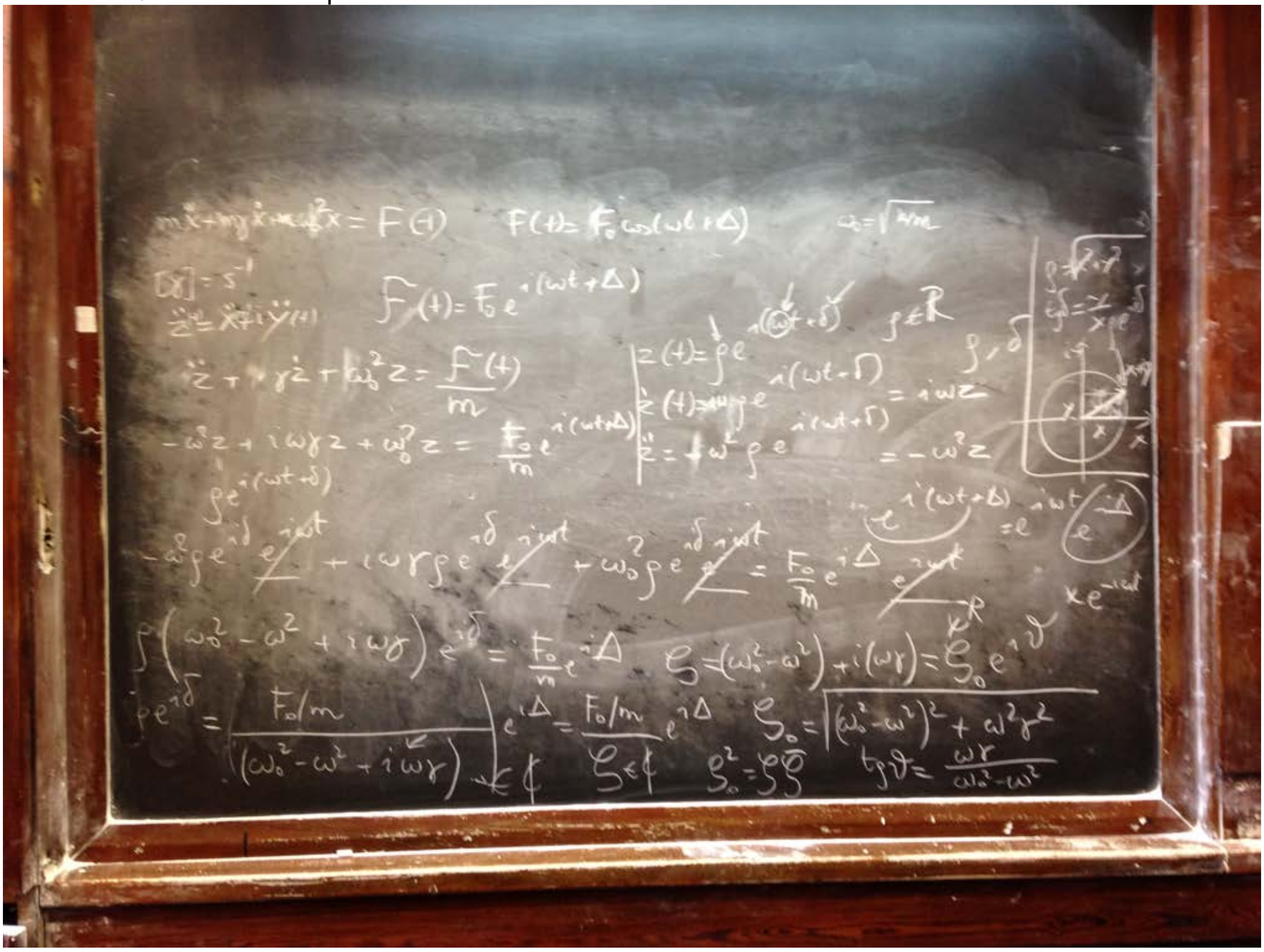
$(\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$

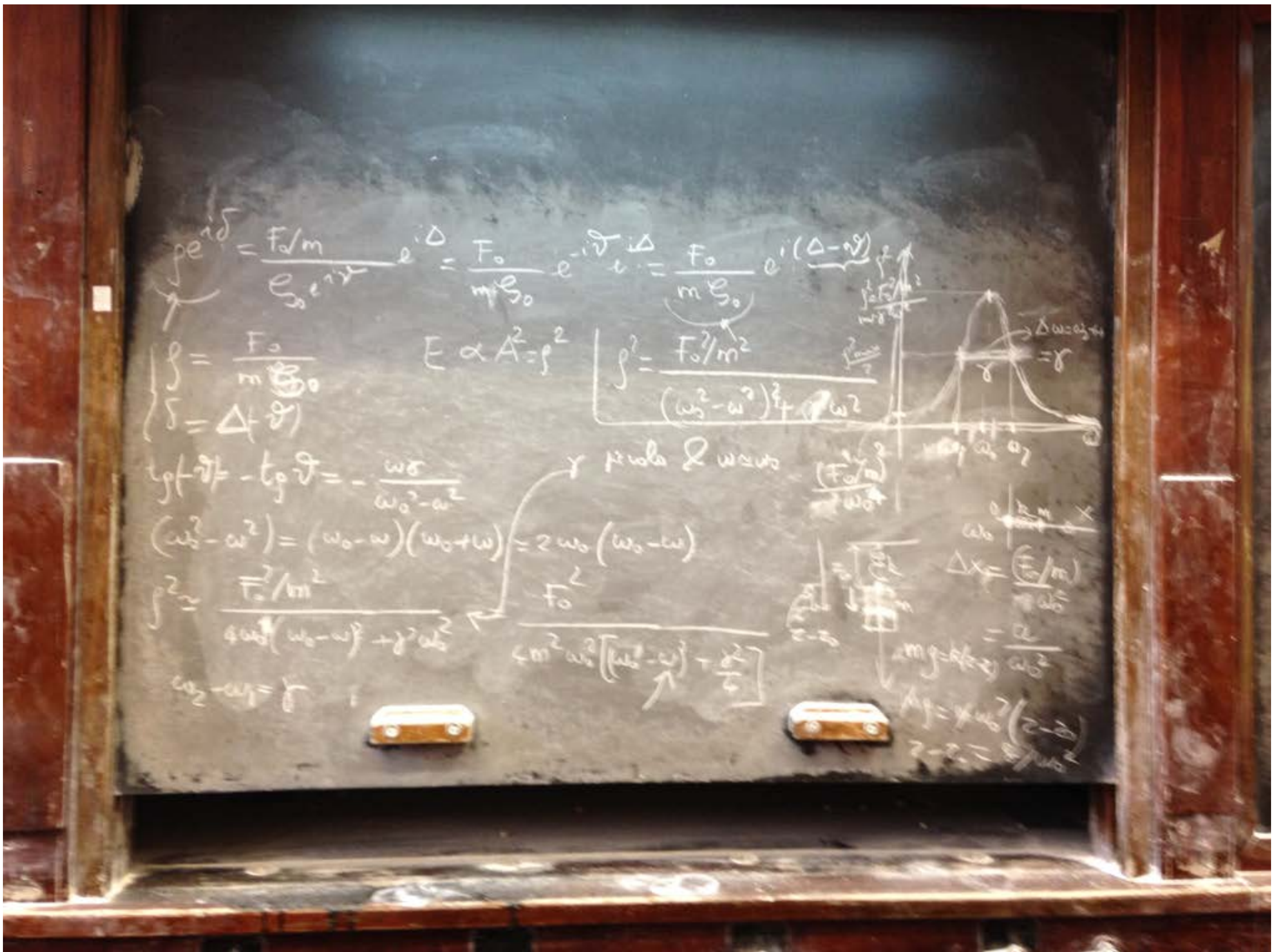
$$\rho^2 \simeq \frac{F_0^2/m^2}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\omega_0^2} = \frac{F_0^2}{4m^2\omega_0^2\left[(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right]}$$

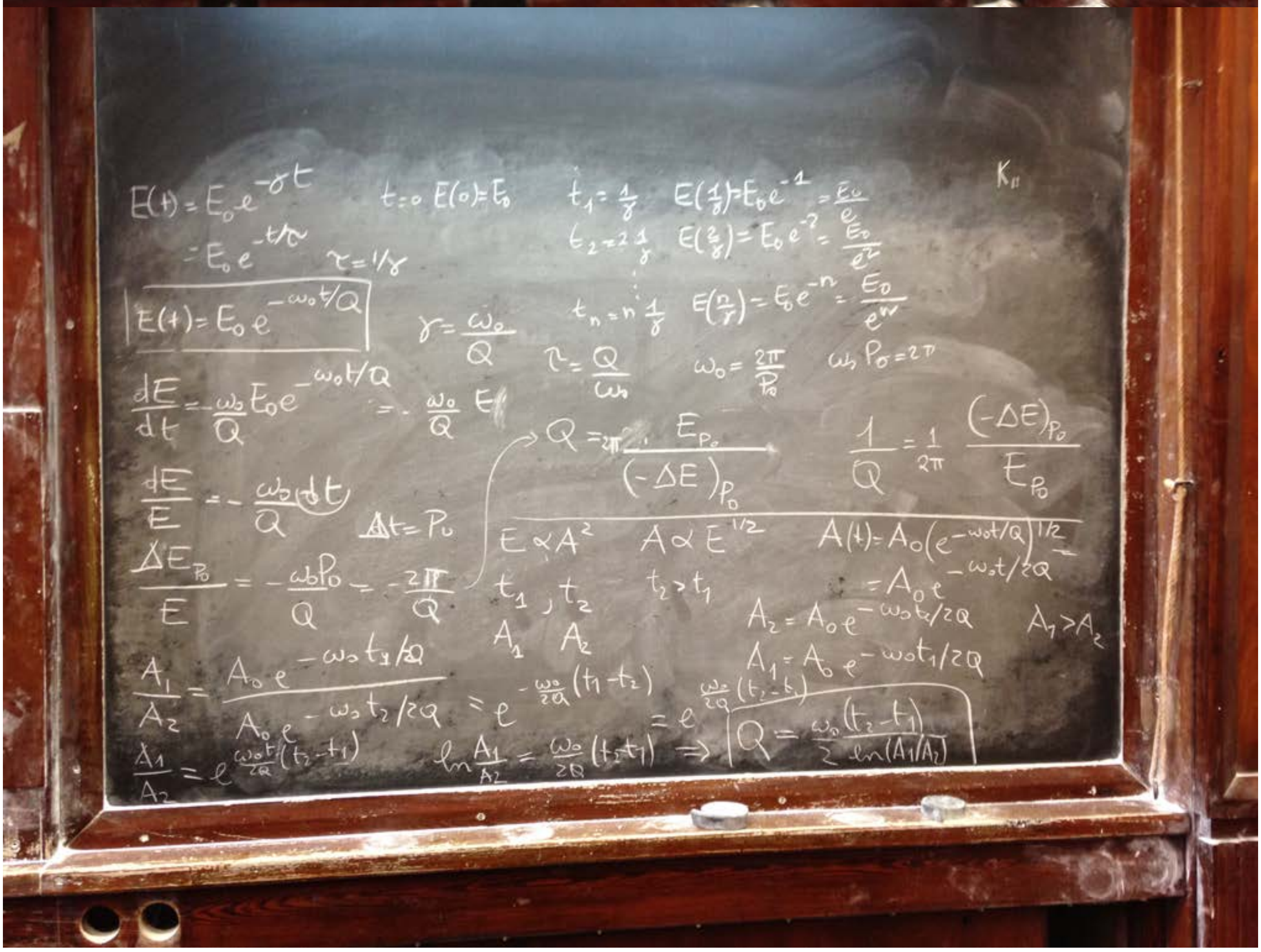
22

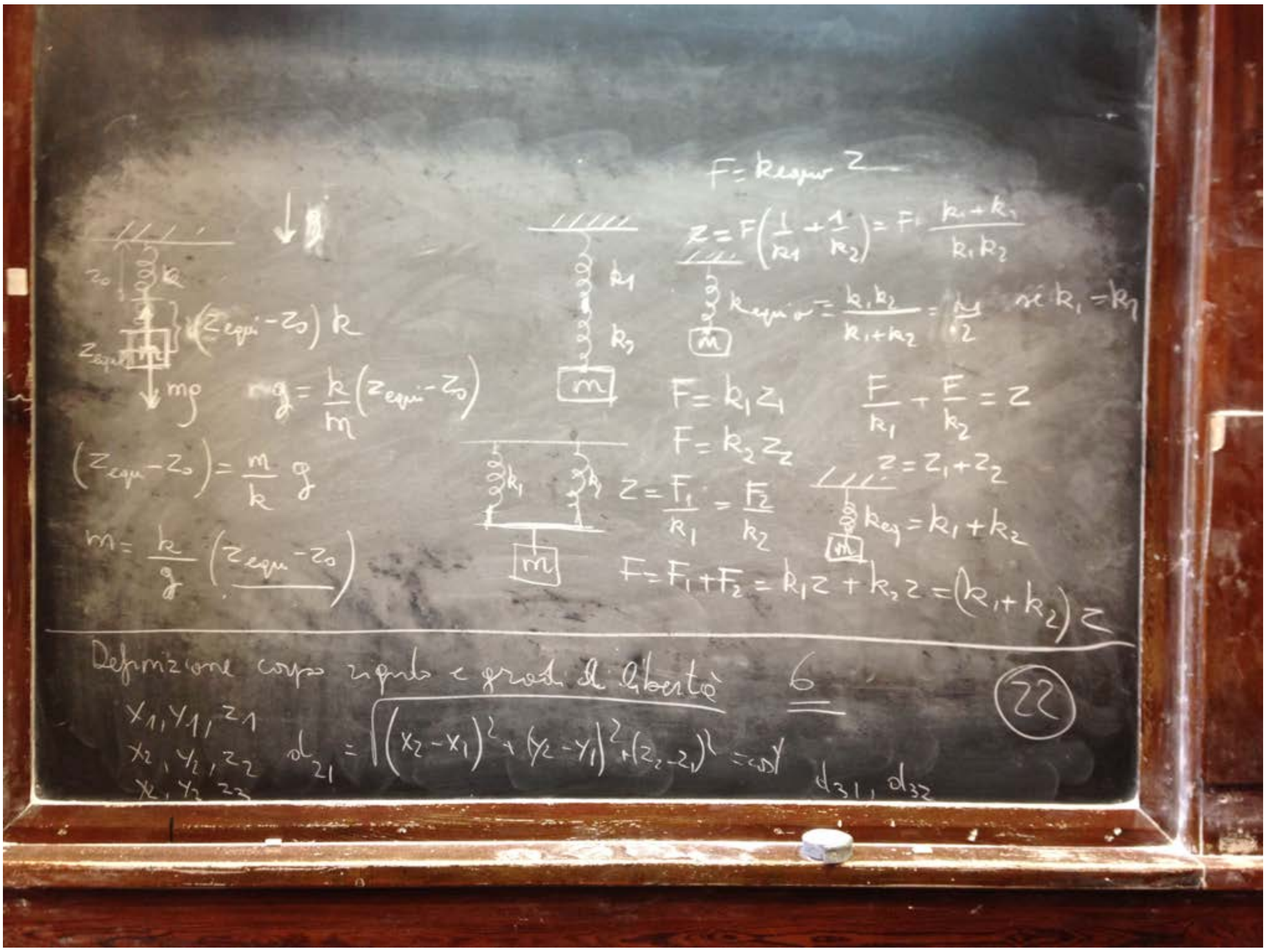
**8 Maggio 2014**

Oscillatore armonico forzato e smorzato risolto mediante passaggio agli esponenziali complessi.
Concetto di dissipazione.
Risposta dell'oscillatore. Ruolo della risonanza. Approssimazione nel caso di piccola dissipazione.
Concetto e definizione del fattore di qualità Q e sua relazione con il coefficiente di dissipazione.
Ruolo del Q e sua misura sperimentale

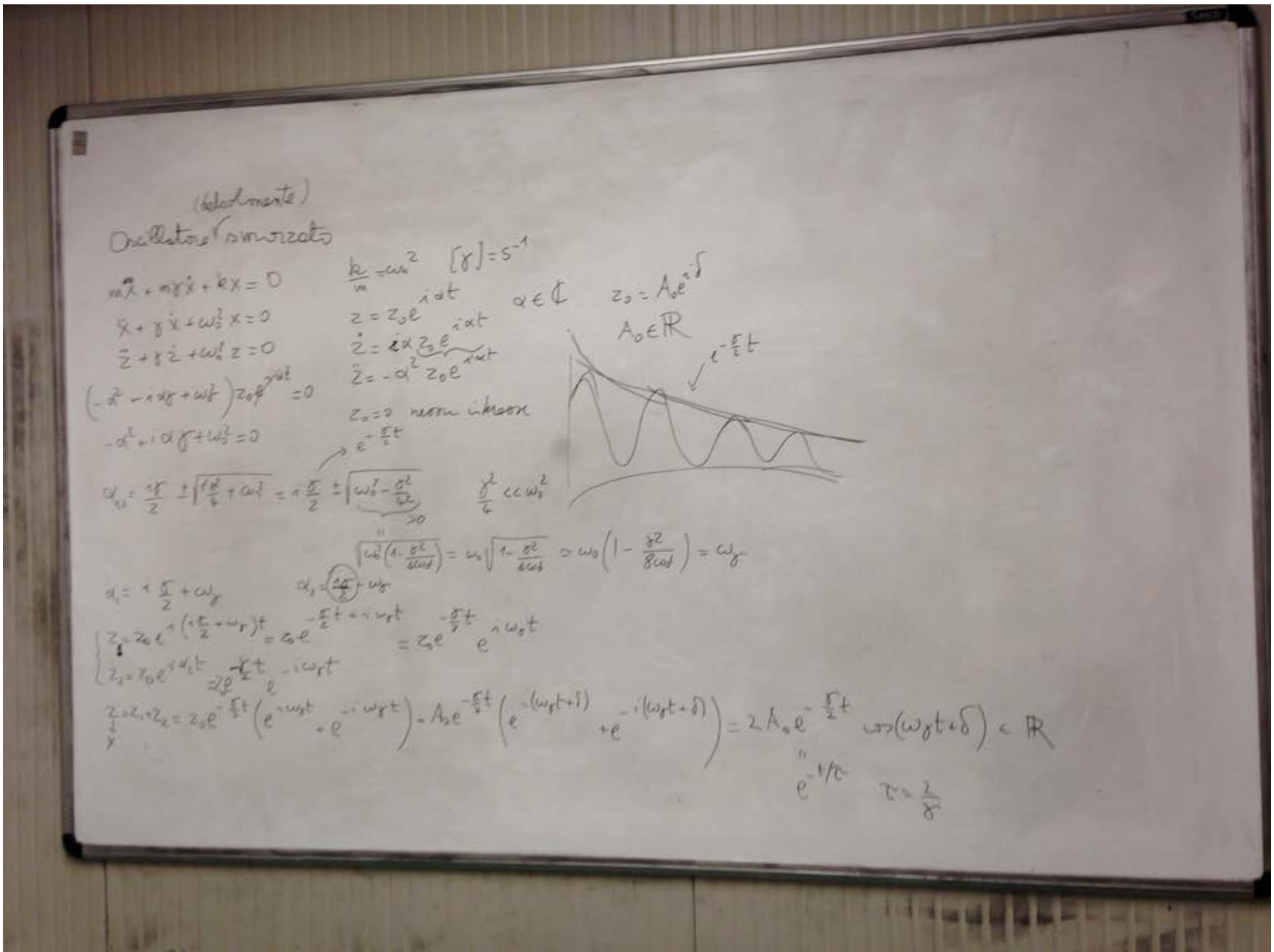


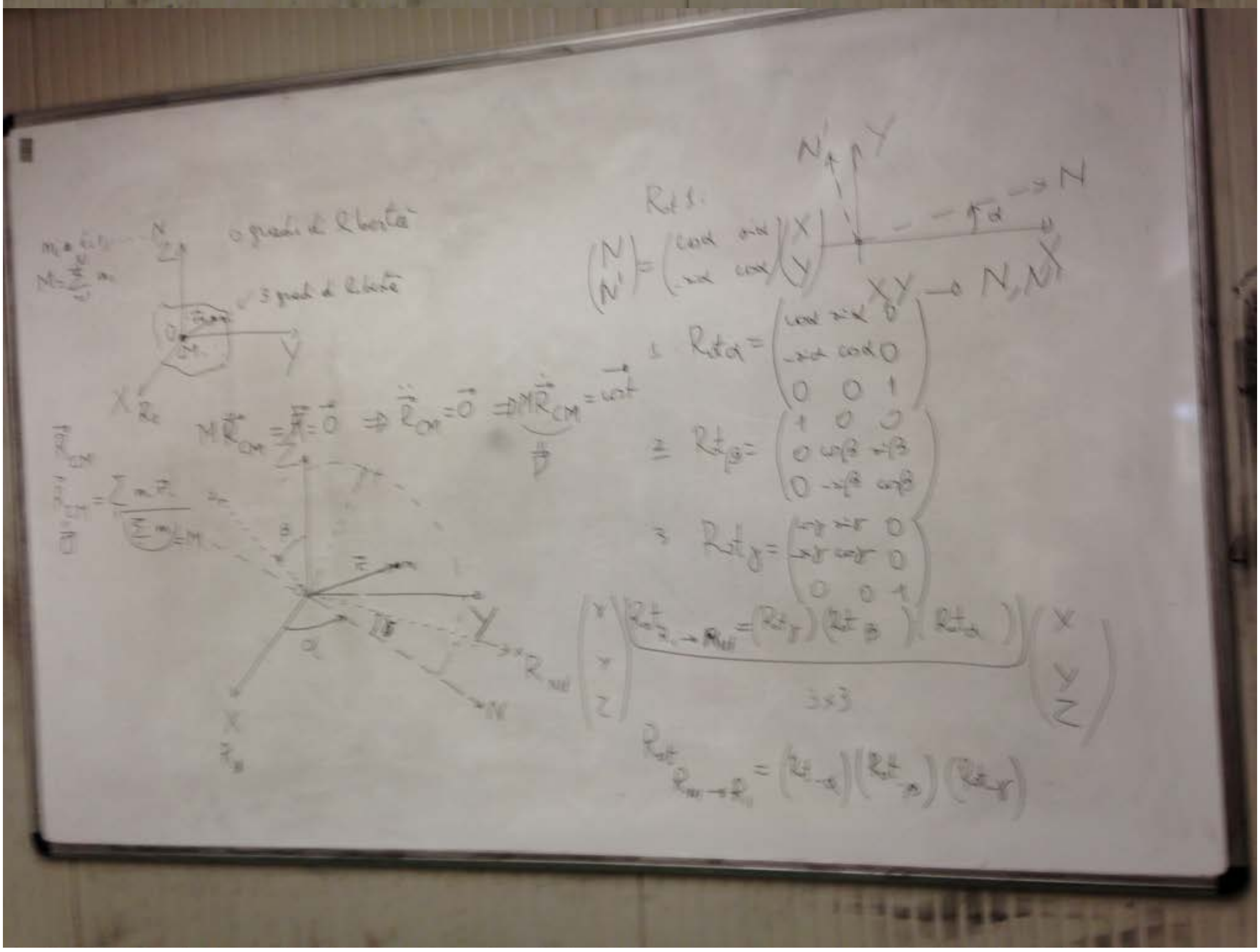


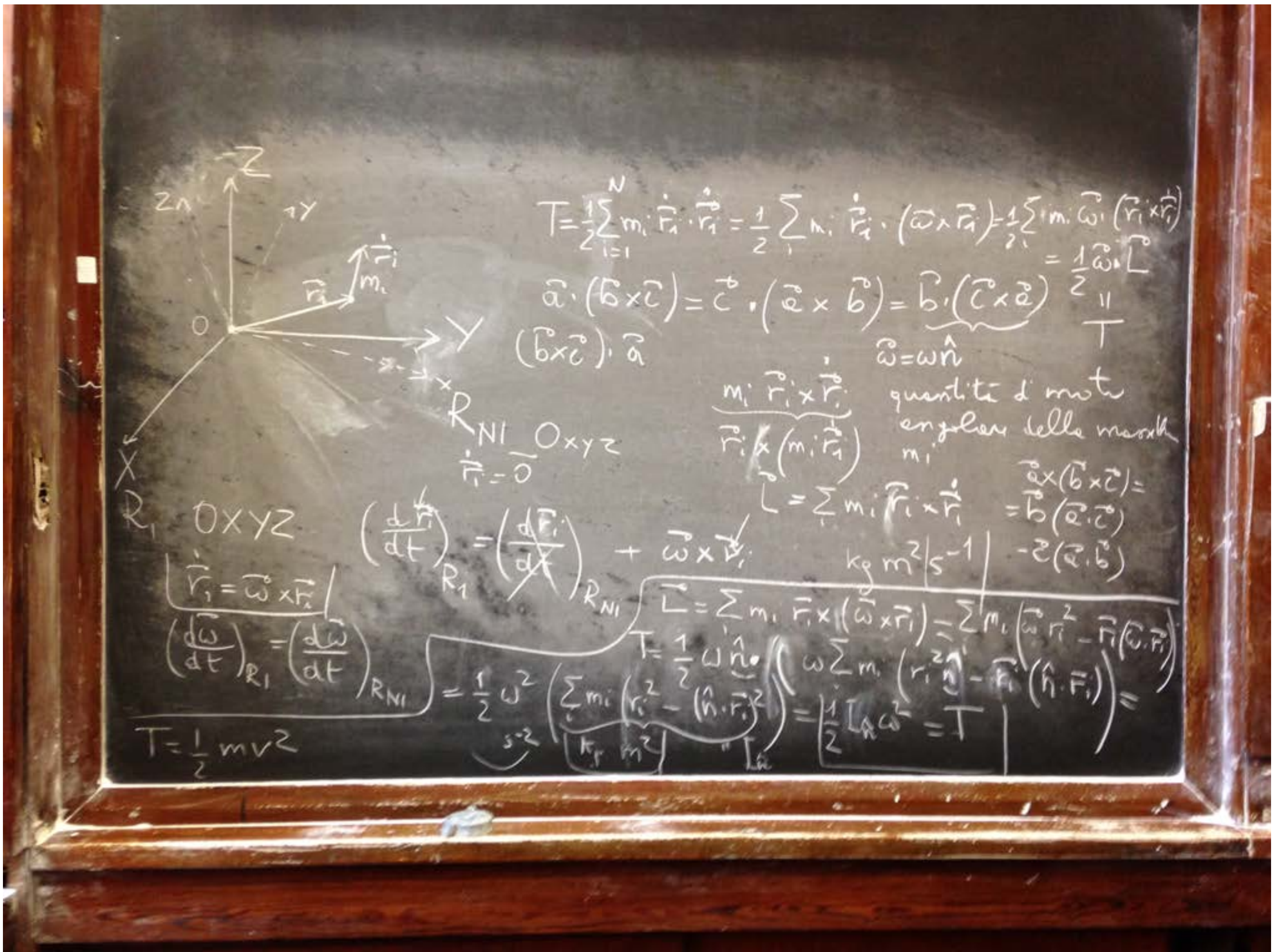

E(t) = E₀e^{-γt}
t=0 E(0)=E₀
t₁ = 1/γ E(1/γ)=E₀e^{-1} = E₀/e
τ=1/γ
E(t)= E₀e^{-ω₀t/Q}
γ = ω₀/Q
τ = Q/ω₀
ω₀ = 2π/P₀
dE/dt = -ω₀/Q E₀e^{-ω₀t/Q} = -ω₀/Q E
dE/E = -ω₀/Q dt
Δt = P₀
Q = 2π E_{P₀}/(-ΔE)_{P₀}
1/Q = 1/2π (-ΔE)_{P₀}/E_{P₀}
E ∝ A² A ∝ E^{1/2}
A₂ = A₀e^{-ω₀t₂/2Q}
A₁ = A₀e^{-ω₀t₁/2Q}
A₁>A₂
ln A₁/A₂ = ω₀/2Q (t₂-t₁)
Q = ω₀(t₂-t₁)/2 ln(A₁/A₂)



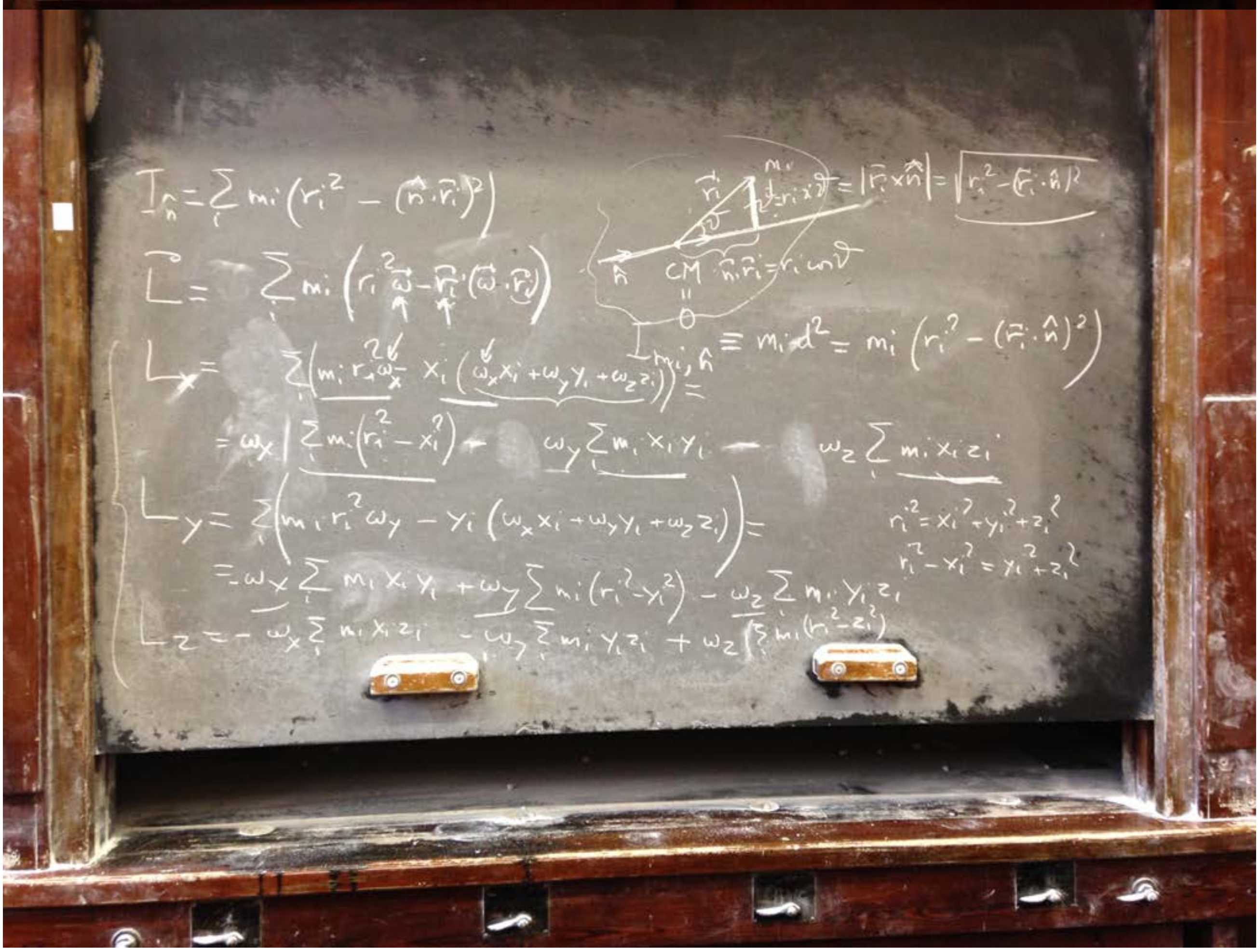

**13 Maggio 2014**
Oscillatore armonico semplicemente smorzato.
Corpo rigido. Gradi di libertà. Centro di massa, angoli di Eulero.


(debolmente)
Oscillatore smorzato
$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + kx = 0$
$\frac{k}{m} = \omega_0^2$
$[\gamma] = s^{-1}$
$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
$z = z_0 e^{i\alpha t}$
$\alpha \in \mathbb{C}$
$z_0 = A_0 e^{i\delta}$
$A_0 \in \mathbb{R}$
$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
$\dot{z} = i\alpha z_0 e^{i\alpha t}$
$\ddot{z} = -\alpha^2 z_0 e^{i\alpha t}$
$e^{-\frac{\gamma}{2}t}$
$-\alpha^2 + i\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$
$\frac{\gamma^2}{4} \ll \omega_0^2$
$= \omega_\gamma$
$= 2A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_\gamma t + \delta) \in \mathbb{R}$
$\tau = \frac{2}{\gamma}$

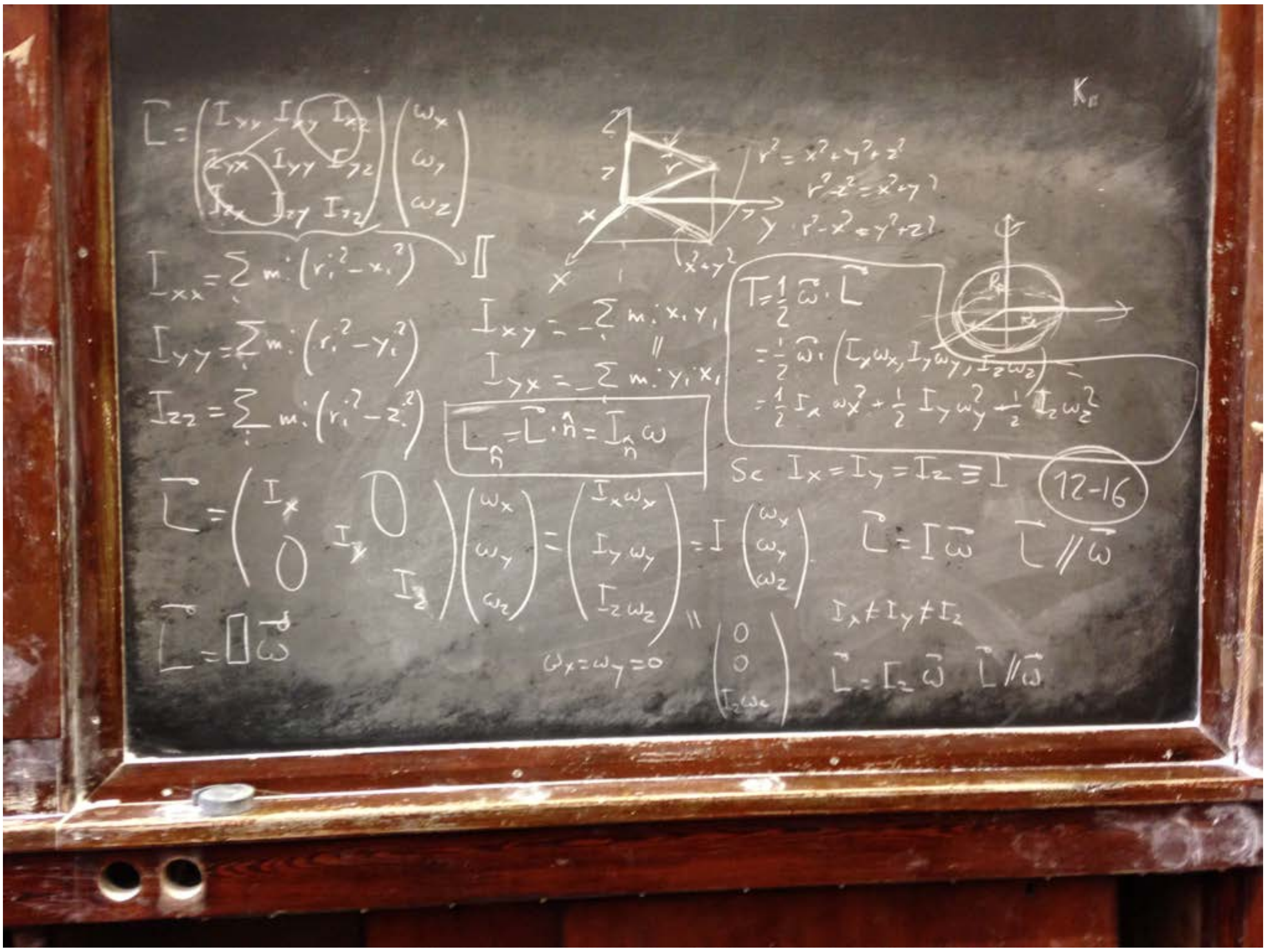

6 gradi di libertà
3 gradi di libertà
$R_{CM}$
$X$
$Y$
$Z$
$N$
$N'$
$\begin{pmatrix} N \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
$X, Y \to N, N'$
$3\times 3$



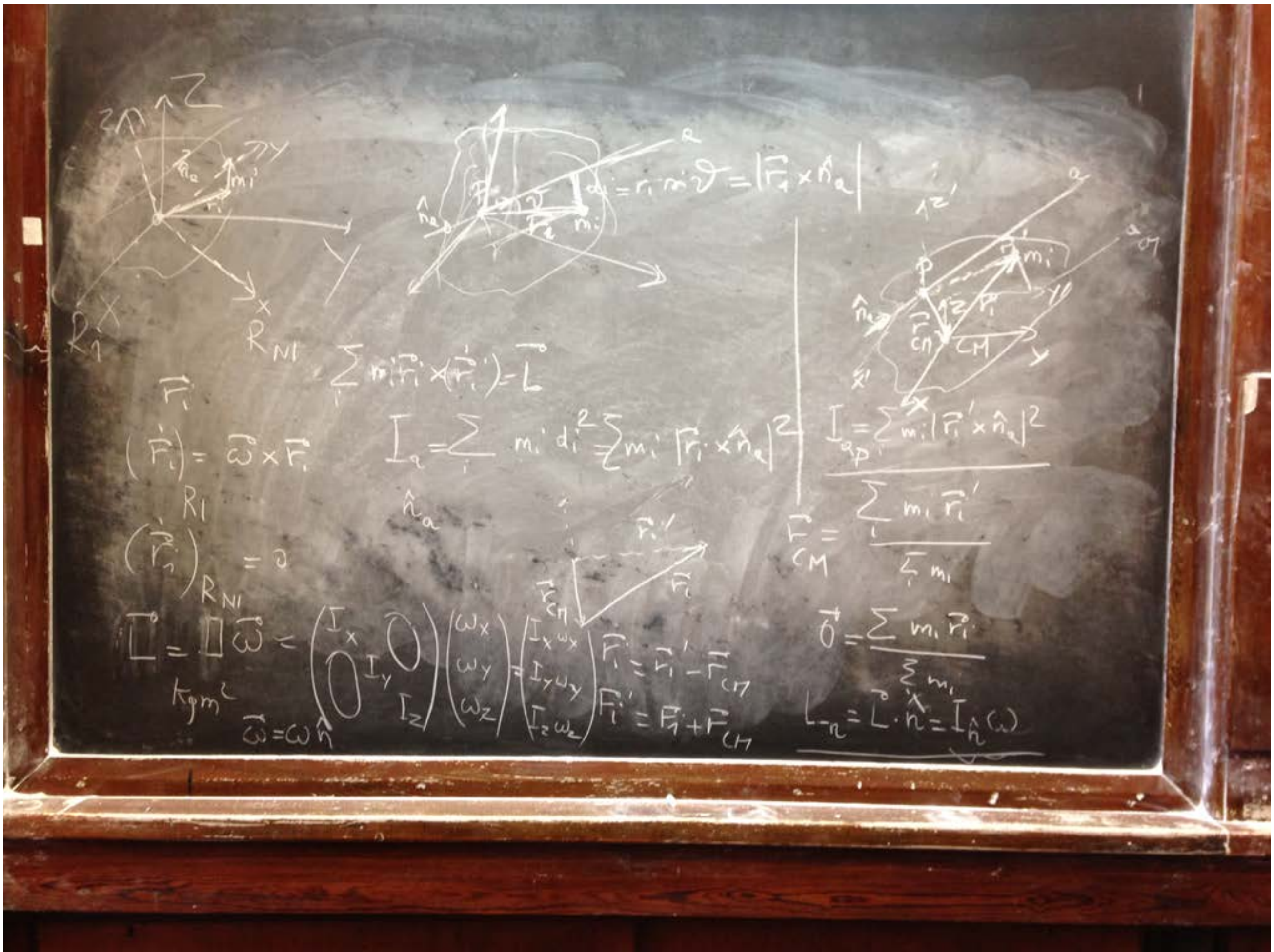
Z
Y
X
O
$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec r}_i\cdot\dot{\vec r}_i=\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec r}_i\cdot(\vec\omega\times\vec r_i)=\frac{1}{2}\sum_i m_i\vec\omega\cdot(\vec r_i\times\dot{\vec r}_i)=\frac{1}{2}\vec\omega\cdot\vec L$
$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=\vec c\cdot(\vec a\times\vec b)=\vec b\cdot(\vec c\times\vec a)$
$(\vec b\times\vec c)\cdot\vec a$
$\vec\omega=\omega\hat n$
$m_i\vec r_i\times\dot{\vec r}_i$
$\vec r_i\times(m_i\dot{\vec r}_i)$
quantità di moto angolare della massa $m_i$
$R_{NI}$ Oxyz
$\dot{\vec r}_i=\vec 0$
$R_1$ OXYZ
$\vec L=\sum m_i\vec r_i\times\dot{\vec r}_i$
$\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b(\vec a\cdot\vec c)-\vec c(\vec a\cdot\vec b)$
$\left(\frac{d\vec r_i}{dt}\right)_{R_1}=\left(\frac{d\vec r_i}{dt}\right)_{R_{NI}}+\vec\omega\times\vec r_i$
$kg\,m^2 s^{-1}$
$\dot{\vec r}_i=\vec\omega\times\vec r_i$
$\vec L=\sum m_i\vec r_i\times(\vec\omega\times\vec r_i)=\sum m_i(\vec\omega r_i^2-\vec r_i(\vec\omega\cdot\vec r_i))$
$\left(\frac{d\vec\omega}{dt}\right)_{R_1}=\left(\frac{d\vec\omega}{dt}\right)_{R_{NI}}$
$T=\frac{1}{2}\omega\hat n\cdot\left(\omega\sum m_i(r_i^2\hat n-\vec r_i(\hat n\cdot\vec r_i))\right)=$
$=\frac{1}{2}\omega^2\left(\sum m_i(r_i^2-(\hat n\cdot\vec r_i)^2)\right)=\frac{1}{2}I_{\hat n}\omega^2=T$
$kg\,m^2$
$T=\frac{1}{2}mv^2$

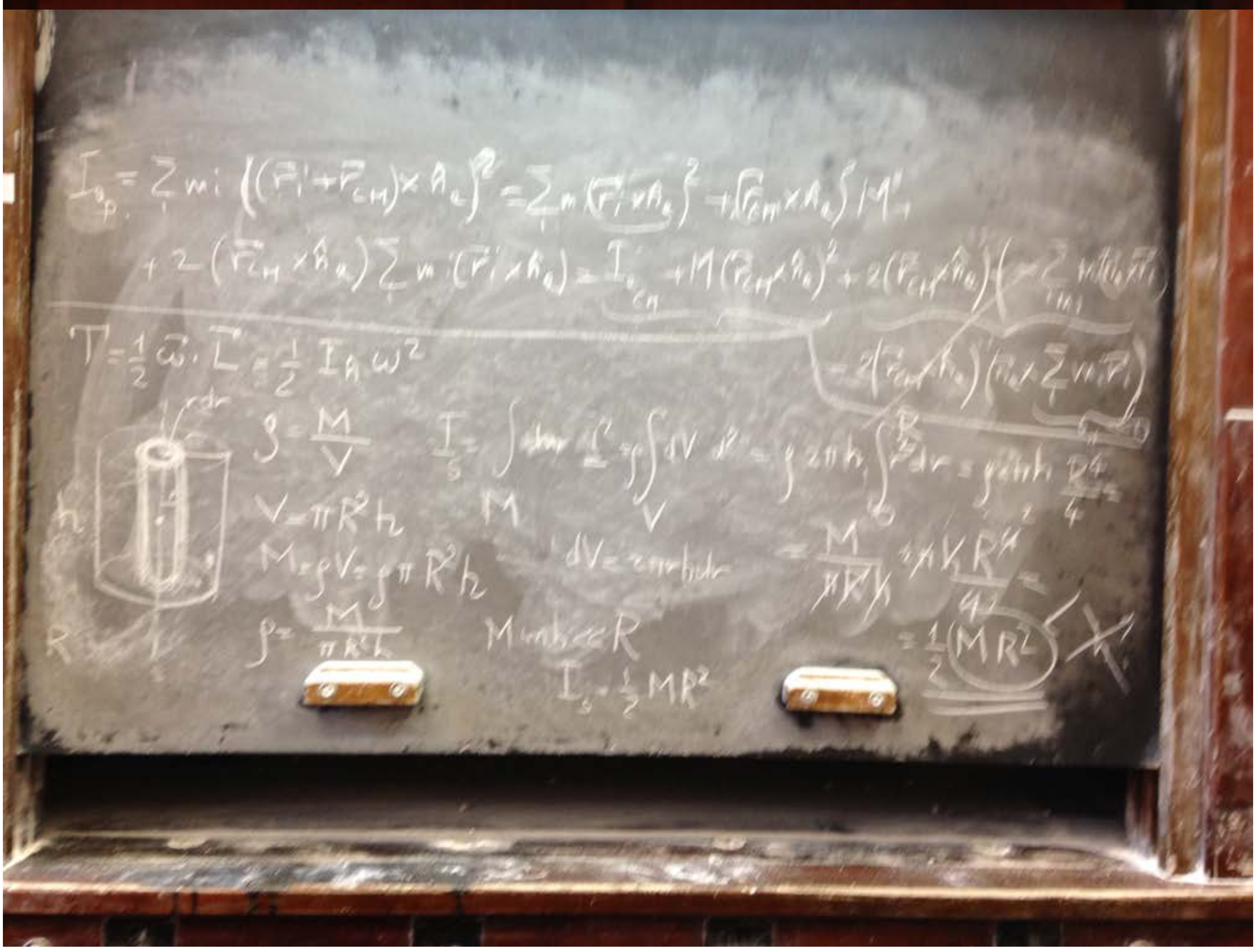



$I_{\hat n}=\sum_i m_i(r_i^2-(\hat n\cdot\vec r_i)^2)$
$|\vec r_i\times\hat n|=\sqrt{r_i^2-(\vec r_i\cdot\hat n)^2}$
$\hat n\cdot\vec r_i=r_i\cos\vartheta$
CM
$\equiv m_i d^2=m_i(r_i^2-(\vec r_i\cdot\hat n)^2)$
$\vec L=\sum_i m_i(r_i^2\vec\omega-\vec r_i(\vec\omega\cdot\vec r_i))$
$L_x=\sum_i(m_i r_i^2\omega_x-x_i(\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i))=$
$=\omega_x\sum m_i(r_i^2-x_i^2)-\omega_y\sum m_i x_i y_i-\omega_z\sum m_i x_i z_i$
$L_y=\sum_i(m_i r_i^2\omega_y-y_i(\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i))=$
$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$
$r_i^2-x_i^2=y_i^2+z_i^2$
$=-\omega_x\sum m_i x_i y_i+\omega_y\sum m_i(r_i^2-y_i^2)-\omega_z\sum m_i y_i z_i$
$L_z=-\omega_x\sum m_i x_i z_i-\omega_y\sum m_i y_i z_i+\omega_z\sum m_i(r_i^2-z_i^2)$

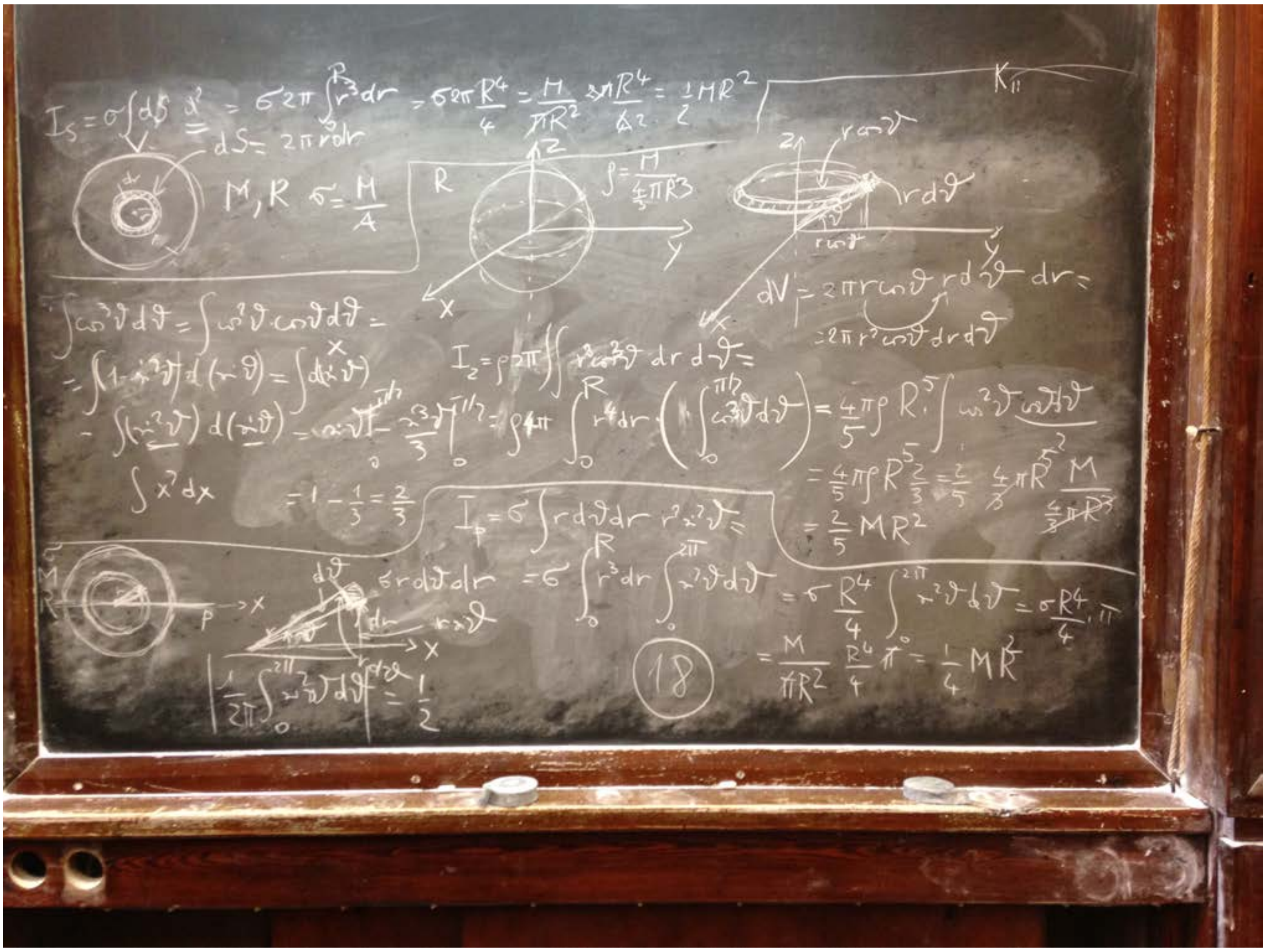



15 Maggio 2014
Corpo rigido. Matrice di inerzia. Assi principali di inerzia.
Momento d’inerzia. Metodi per il calcolo del momenti di inerzia in vari casi significativi.

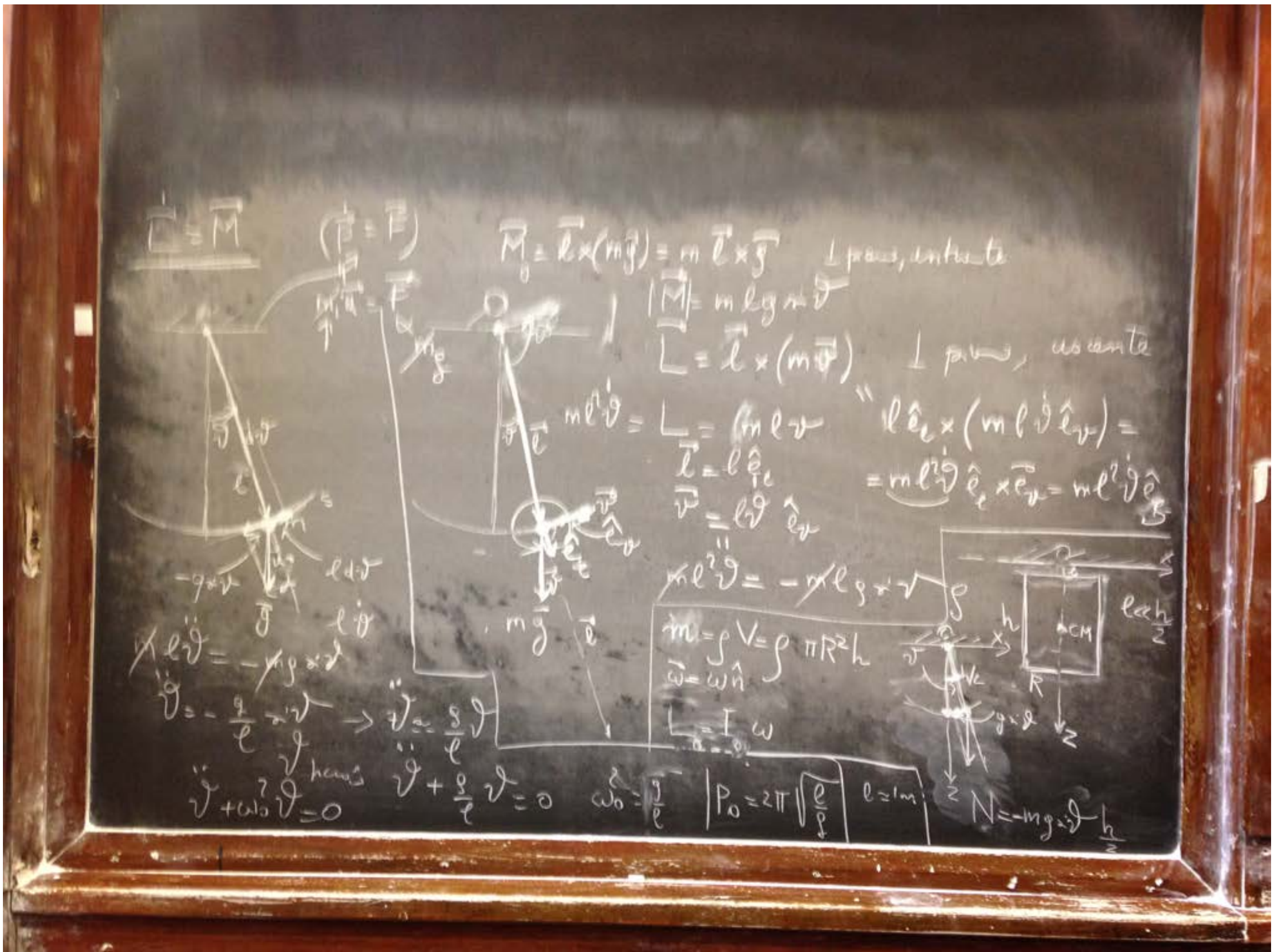


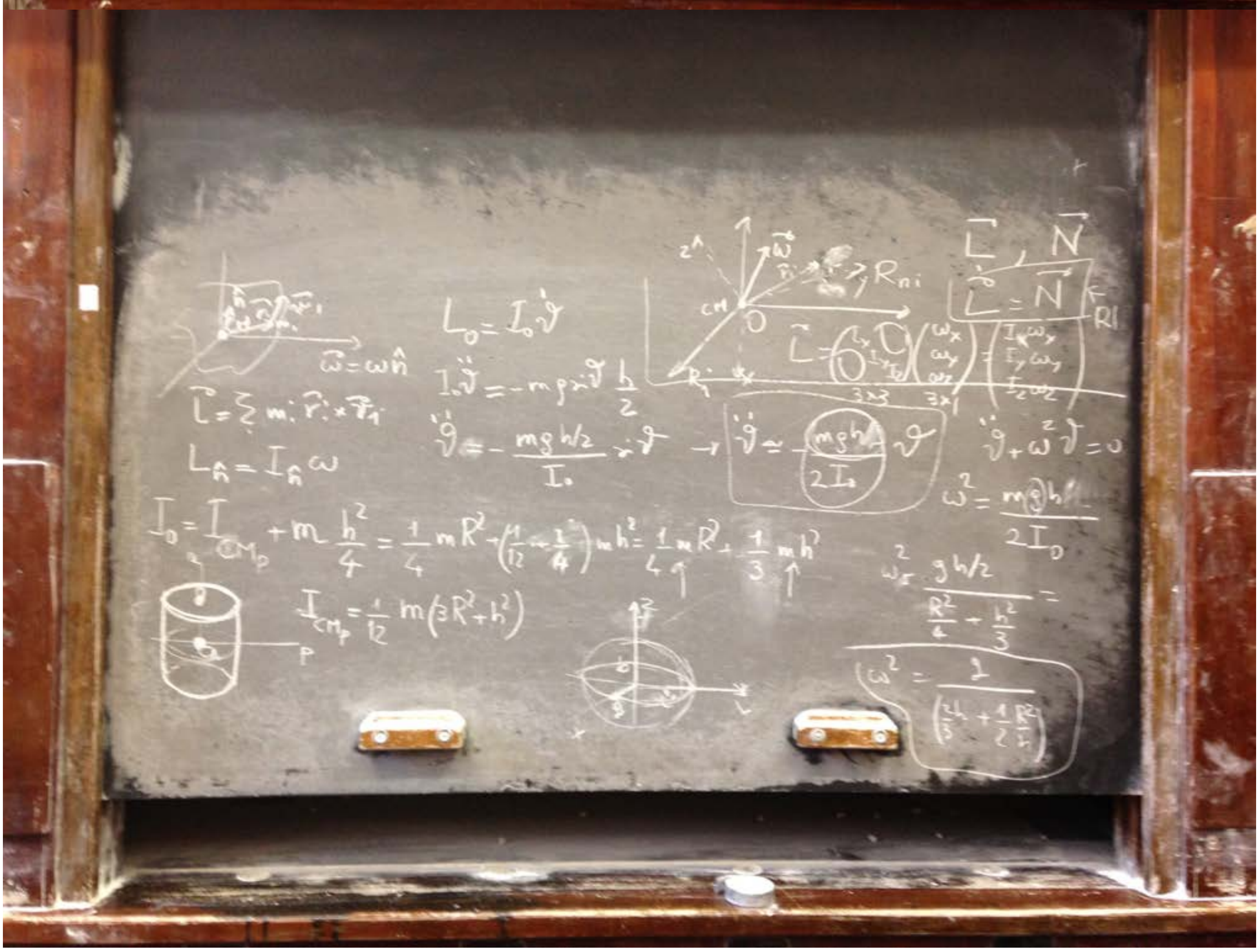


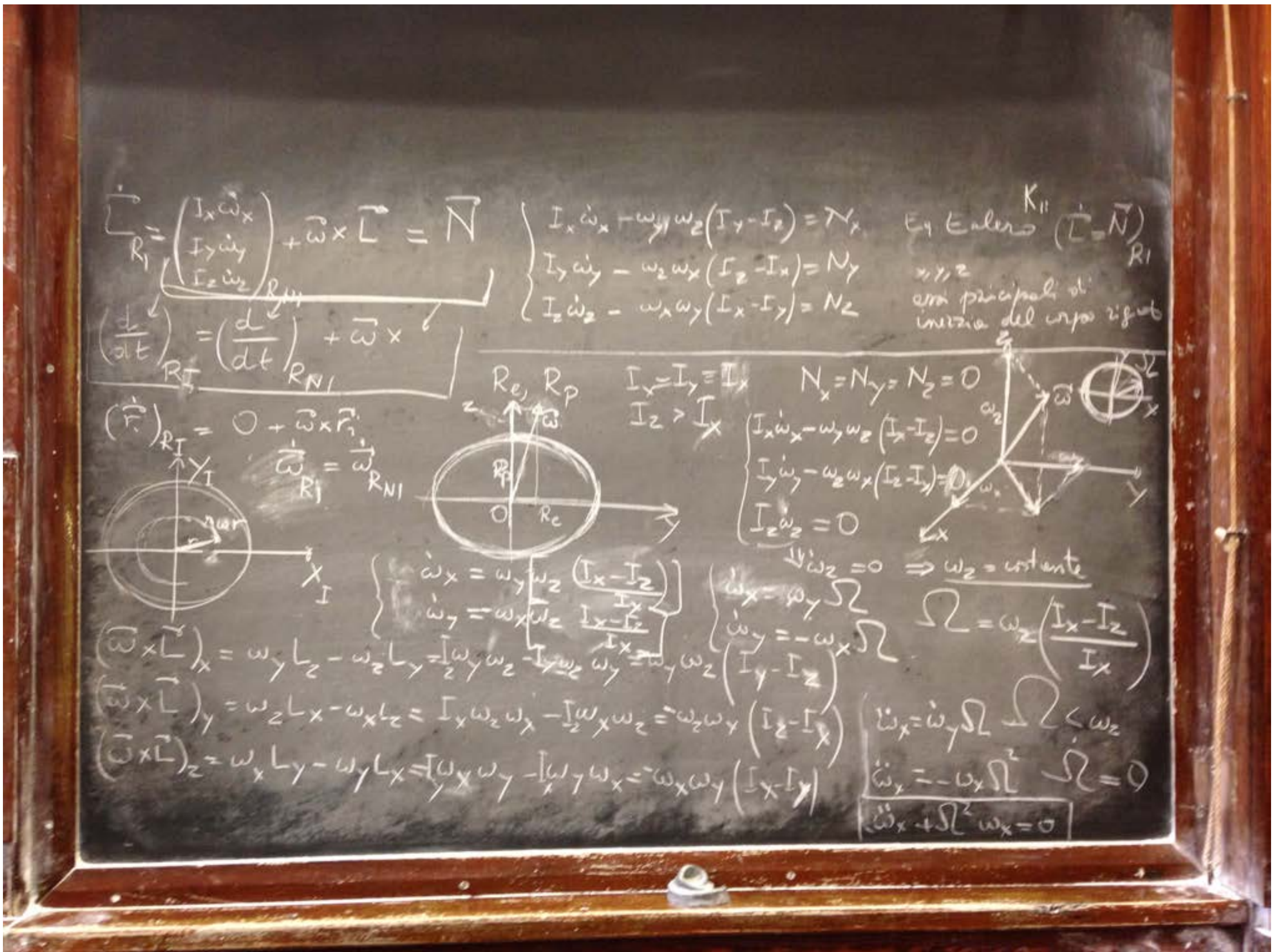
ρ = M/V
V = πR²h
I_s = ½ MR²

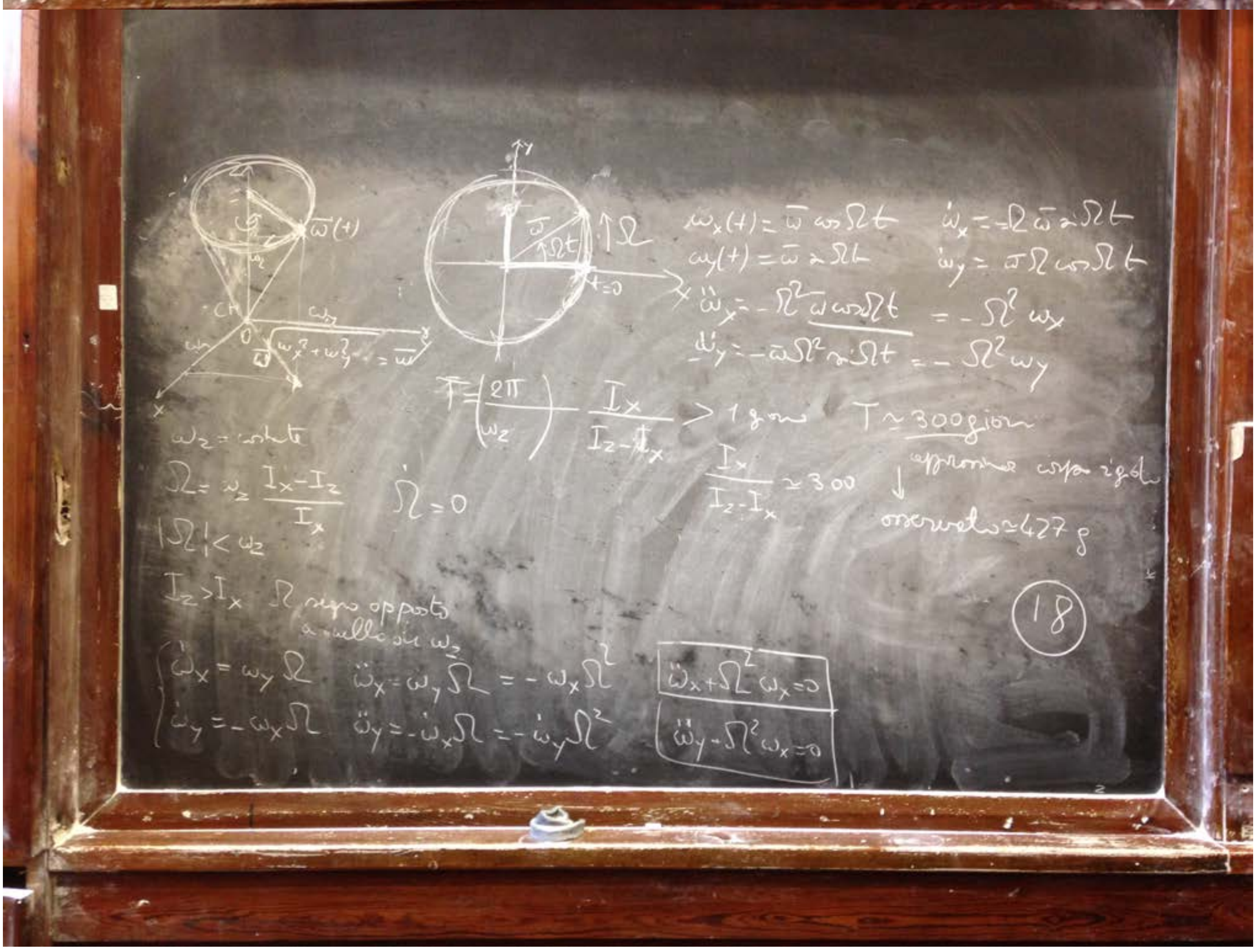


**<u>20 Maggio 2014 (3 ore)</u>**
Equazioni di Newton del moto del corpo rigido
Riferimento inerziale e riferimento solidale con il copro rigido. Derivate rispetto al tempo nei due sistemi.
Equazioni di Eulero del moto del corpo rigido attorno al proprio centro di massa.
Loro applicazione nel caso della precessione libera della Terra come corpo rigido

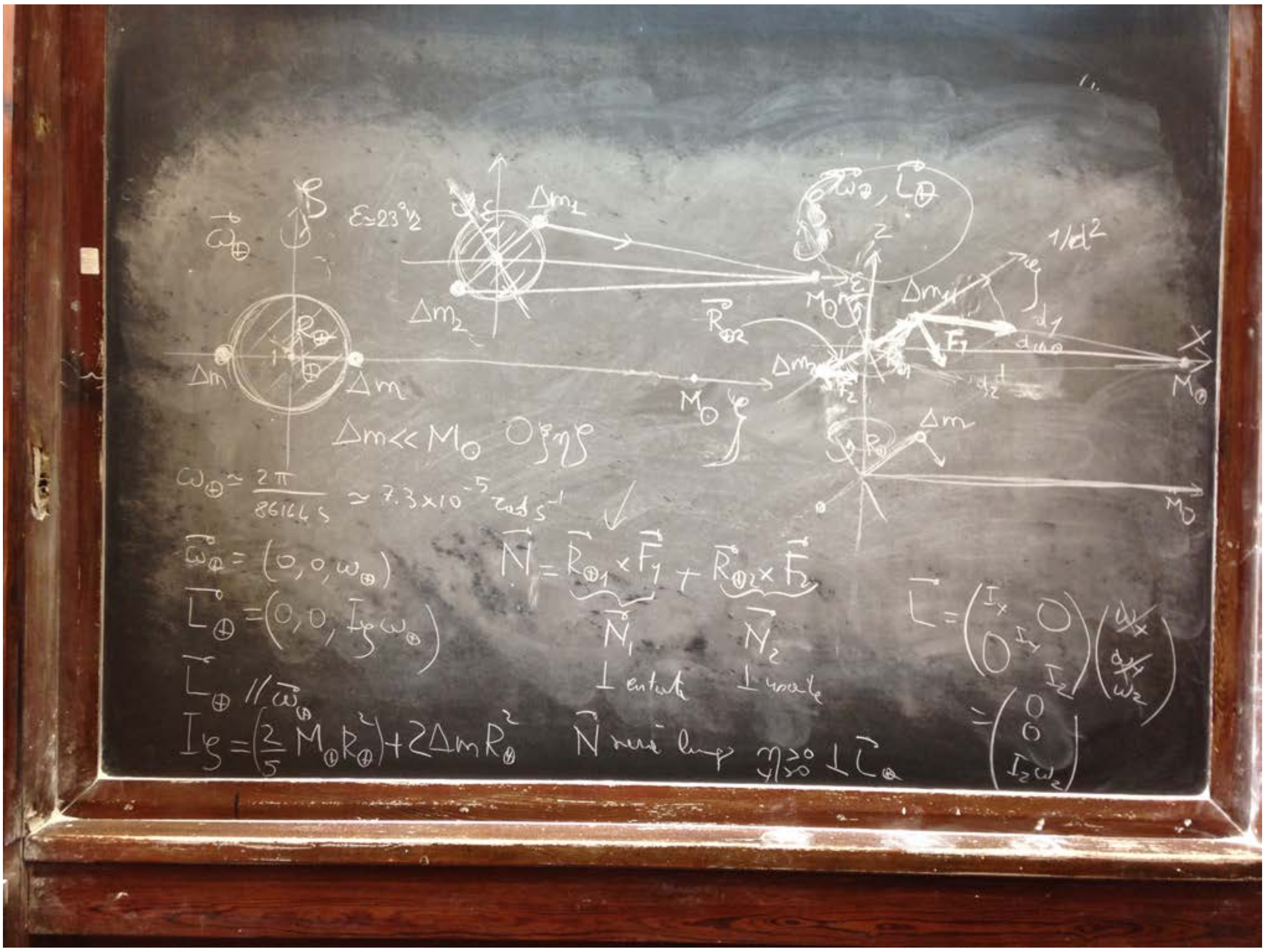

⊥ piano, uscente
$P_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
$\ell = 1\,m$

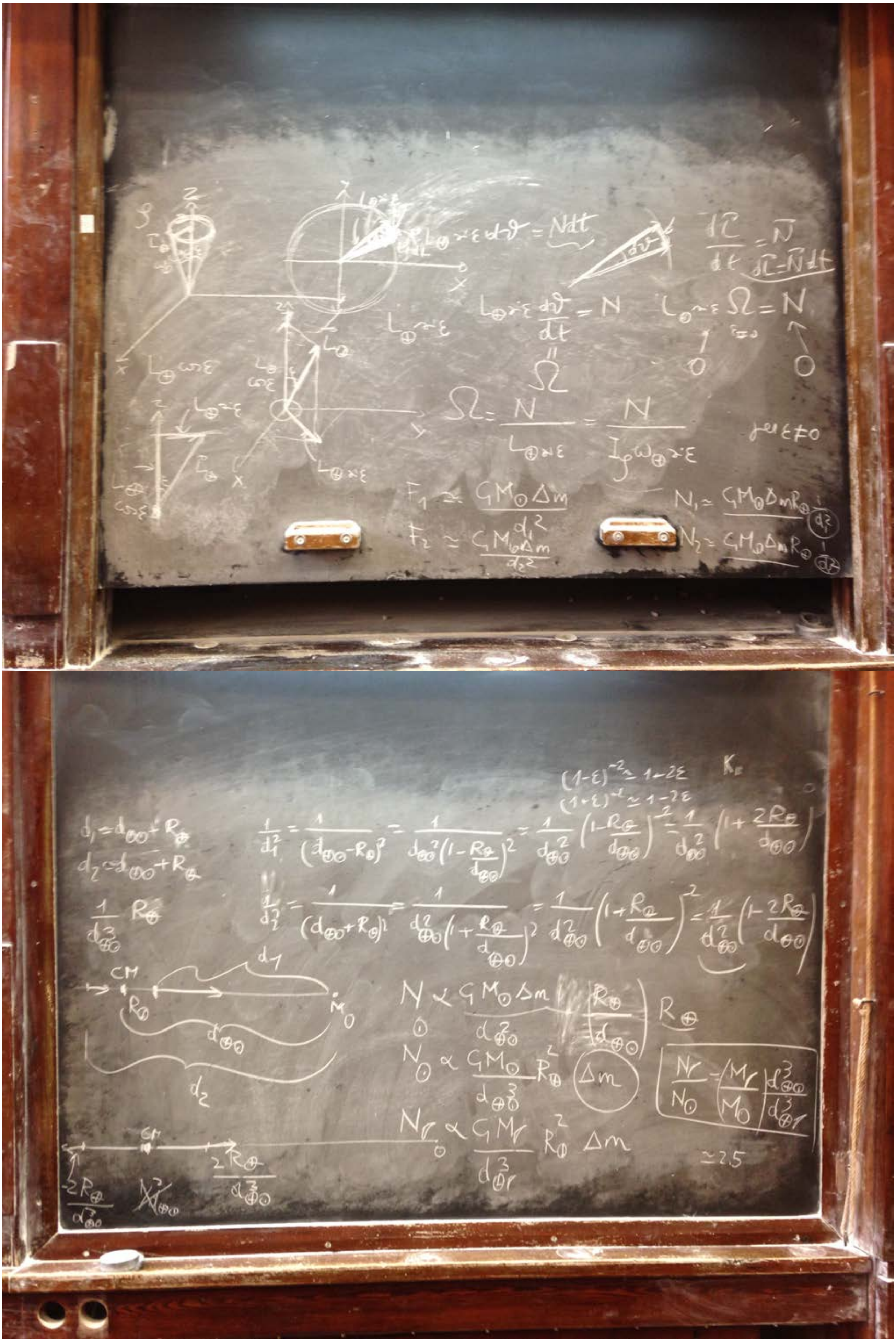


$L_0 = I_0\dot{\vartheta}$
$\vec{\omega} = \omega\hat{n}$
$L_{\hat{n}} = I_{\hat{n}}\omega$
$I_{CM_p} = \frac{1}{12}m(3R^2 + h^2)$


$\dot{\vec{L}}_{R_I} = \begin{pmatrix} I_x\dot\omega_x \\ I_y\dot\omega_y \\ I_z\dot\omega_z \end{pmatrix}_{R_{NI}} + \vec\omega\times\vec L = \vec N$
$I_x\dot\omega_x - \omega_y\omega_z(I_y - I_z) = N_x$
$I_y\dot\omega_y - \omega_z\omega_x(I_z - I_x) = N_y$
$I_z\dot\omega_z - \omega_x\omega_y(I_x - I_y) = N_z$
Eq Eulero $K_{II}$ $(\dot{\vec L} = \vec N)_{R_I}$
x, y, z assi principali di inerzia del corpo rigido
$\left(\frac{d}{dt}\right)_{R_I} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{R_{NI}} + \vec\omega\times$
$(\dot{\vec r})_{R_I} = 0 + \vec\omega\times\vec r$
$\dot{\vec\omega}_{R_I} = \dot{\vec\omega}_{R_{NI}}$
$R_e, R_p$
$I_x = I_y = I$ $\quad N_x = N_y = N_z = 0$
$I_z > I_x$
$I_x\dot\omega_x - \omega_y\omega_z(I_y - I_z) = 0$
$I_y\dot\omega_y - \omega_z\omega_x(I_z - I_x) = 0$
$I_z\dot\omega_z = 0$
$\dot\omega_z = 0 \Rightarrow \omega_z = \text{costante}$
$\dot\omega_x = \omega_y\omega_z\frac{I_x - I_z}{I_x}$
$\dot\omega_y = -\omega_x\omega_z\frac{I_x - I_z}{I_x}$
$\dot\omega_x = \omega_y\Omega$
$\dot\omega_y = -\omega_x\Omega$
$\Omega = \omega_z\left(\frac{I_x - I_z}{I_x}\right)$
$(\vec\omega\times\vec L)_x = \omega_y L_z - \omega_z L_y = I_z\omega_y\omega_z - I_y\omega_z\omega_y = \omega_y\omega_z(I_z - I_y)$
$(\vec\omega\times\vec L)_y = \omega_z L_x - \omega_x L_z = I_x\omega_z\omega_x - I_z\omega_x\omega_z = \omega_z\omega_x(I_x - I_z)$
$(\vec\omega\times\vec L)_z = \omega_x L_y - \omega_y L_x = I_y\omega_x\omega_y - I_x\omega_y\omega_x = \omega_x\omega_y(I_y - I_x)$
$\ddot\omega_x = \dot\omega_y\Omega$ $\quad \Omega < \omega_z$
$\ddot\omega_x = -\omega_x\Omega^2$ $\quad \dot\Omega = 0$
$\boxed{\ddot\omega_x + \Omega^2\omega_x = 0}$

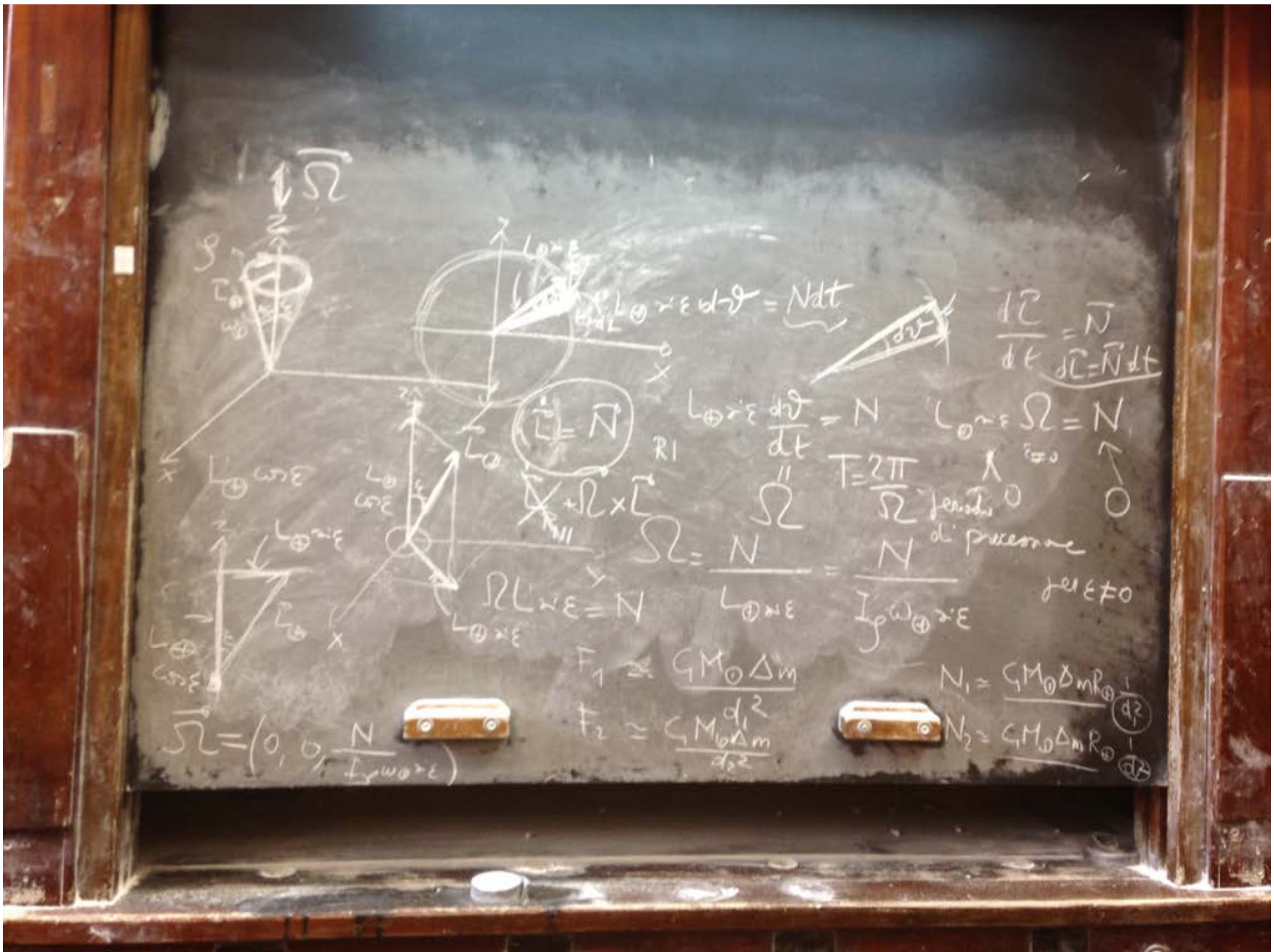
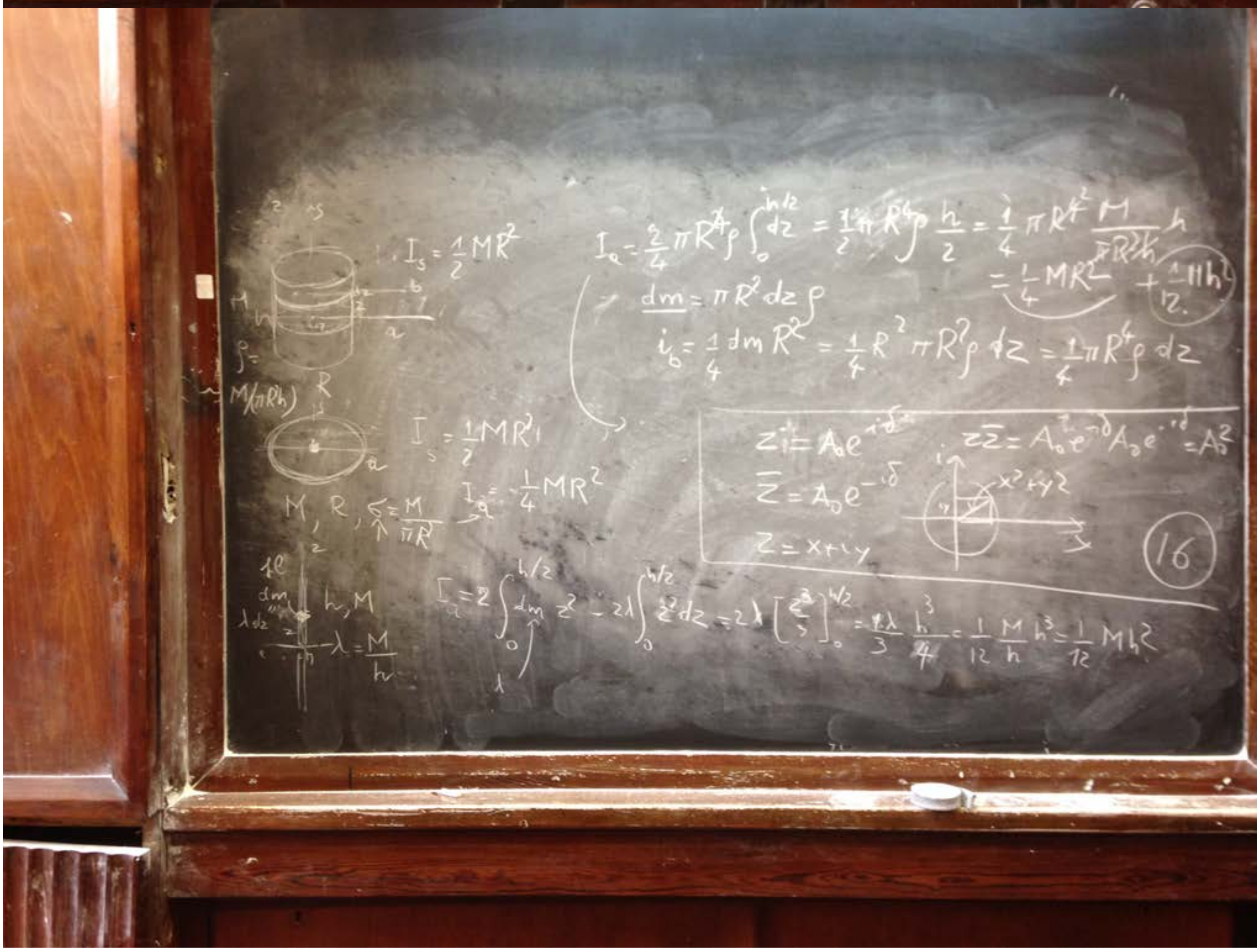

$\vec\omega(t)$
$\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \bar\omega$
$\Omega t$
$t = 0$
$\omega_x(t) = \bar\omega\cos\Omega t$ $\quad \dot\omega_x = -\Omega\bar\omega\sin\Omega t$
$\omega_y(t) = \bar\omega\sin\Omega t$ $\quad \dot\omega_y = \bar\omega\Omega\cos\Omega t$
$\ddot\omega_x = -\Omega^2\bar\omega\cos\Omega t = -\Omega^2\omega_x$
$\ddot\omega_y = -\bar\omega\Omega^2\sin\Omega t = -\Omega^2\omega_y$
$T = \left(\frac{2\pi}{\omega_z}\right)\frac{I_x}{I_z - I_x} > 1$ giorno $\quad T \simeq 300$ giorni
$\frac{I_x}{I_z - I_x} \simeq 300$
approssimazione corpo rigido
osservato $\simeq 427$ g
$\omega_z = \text{costante}$
$\Omega = \omega_z\frac{I_x - I_z}{I_x}$ $\quad \dot\Omega = 0$
$|\Omega| < \omega_z$
$I_z > I_x$ $\Omega$ segno opposto a quello di $\omega_z$
$\dot\omega_x = \omega_y\Omega$ $\quad \ddot\omega_x = \dot\omega_y\Omega = -\omega_x\Omega^2$ $\quad \boxed{\ddot\omega_x + \Omega^2\omega_x = 0}$
$\dot\omega_y = -\omega_x\Omega$ $\quad \ddot\omega_y = -\dot\omega_x\Omega = -\dot\omega_y\Omega^2$ $\quad \boxed{\ddot\omega_y - \Omega^2\omega_x = 0}$
18

**22 Maggio 2014 (3 ore)**
Moto del corpo rigido in presenza di momenti di forza non nulli. Il caso della precessione dell’asse di rotazione della Terra causata dalla Luna e dal Sole.
Considerazioni sulla non uniformità della forza di attrazione gravitazionale.
Altri esercizi sul calcolo del momento di inerzia





$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$
$d\vec{L} = \vec{N}\,dt$
$\Omega = \frac{N}{L_\oplus \simeq \varepsilon}$
$F_1 \simeq \frac{GM_\odot \Delta m}{d_1^2}$
$F_2 \simeq \frac{GM_\odot \Delta m}{d_2^2}$
$d_1 = d_{\oplus\odot} - R_\oplus$
$d_2 = d_{\oplus\odot} + R_\oplus$
CM
$d_{\oplus\odot}$
$\simeq 2.5$


periodo di precessione
per ε ≠ 0

16